Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra:	Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Studijní program:	Učitelství pro střední školy
Studijní obor (kombinace)	Matematika - Fyzika

APLIKACE MATEMATICKÉ ANALÝZY VE STŘEDOŠKOLSKÉ FYZICE

APPLICATION OF DIFFERENTIAL CALCULUS IN SECONDARY SCHOOL PHYSICS

Diplomová práce: 09–FP–KMD–003

Autor:

Lenka Raulímová

Podpis:

Adresa:

Křižíkova 120/10

417 01, Dubí

Vedoucí práce: RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

Konzultant:

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
82	0	14	1	24	1

V Liberci dne: 12.5.2009

Prohlášení

Byl(a) jsem seznámen(a) s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval(a) samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

Datum 12.5.2009

Podpis

Poděkování

Ráda bych poděkovala RNDr. Aleně Kopáčkové, Ph.D. za vedení diplomové práce, Mgr. Stanislavu Panošovi, Ph.D. za odborné konzultace a RNDr. Janě Vaškové za pomoc při realizaci praktické části diplomové práce. V neposlední řadě děkuji své rodině a příteli za podporu po celou dobu studia.

// Anotace

Diplomová práce se zabývá vzájemným vztahem matematiky a fyziky. Podává přehled vybraných matematických pojmů diferenciálního a integrálního počtu rozšiřujícího učiva střední školy, soubor základních pojmů středoškolské fyziky vybudovaných s podporou matematické analýzy a komentovaný soubor příkladů s fyzikální tématikou, kde je při řešení použita matematická analýza.

Cílem práce je přiblížit středoškolákovi základní pojmy středoškolské fyziky s využitím aparátu matematické analýzy. Text může sloužit i jako metodická podpora pro učitele matematiky a fyziky. Součástí práce je praktické ověření několika úloh na vybrané střední škole.

Klíčová slova: matematická analýza, metodická podpora

Annotation

The diploma thesis deals with relations between mathematics and physics. It offers an concepts overview of calculus (differential and integral) of additional subject-matter for secondary schools, set of basic concepts of secondary school physics created with support of calculus and commented set of examples with physical thematic, where the calculus is used.

The object of this work is to bring the basic concepts and relations of secondary school physics closer to the student, using calculus. This text can be also used as methodical help for teachers of mathematics and physics. A practical verifying of some problems at the concrete secondary-school is the part of this work, too.

Key words: calculus, methodical help

Annotation

Die Diplomarbeit befasst sich mit der beiderseitigen Relation der Mathematik und der Physik. Sie gibt die Übersicht der mathematischen Begriffe der Differenzial- und der Integralrechnung des erweiterten Lernstoffes für Mittelschule, die Liste der Grundbegriffe der Mittelschulphysik aufgebauter mit der Unterstützung der mathematischen Analyse und die kommentierte Liste der Beispiele mit physikalischer Thematik, wo bei der Lösungen die mathematische Analyse verwendet wird.

Ziel der Arbeit ist die Grundbegriffe der Mittelschulphysik mit Hilfe des Apparates der mathematischen Analyse dem Mittelschüler zu nahebringen. Der Text kann auch als methodische Unterstützung für Lehrer der Mathematik und der Physik dienen. Der Bestandteil der Arbeit ist auch die praktische Überprüfung einiger Aufgaben auf der ausgewählten Mittelschule.

Schlüsselwörter: mathematische Analyse, methodische Unterstützung

Obsah:

Seznam použitých symbolů

a	zrychlení
a_n	normálové zrychlení
a_t	tečné zrychlení
E	energie
E	intenzita elektrického pole
E_k	kinetická energie
F	síla
F_0	odporující síla
F_{el}	elektrická síla
F_v	výsledná síla
I	elektrický proud
$\boldsymbol{i}$	jednotkový vektor
j	hustota proudu
$\boldsymbol{j}$	jednotkový vektor
$\boldsymbol{k}$	jednotkový vektor
l	délka
m	hmotnost
n	počet molů
p	hybnost
P	tlak
P	výkon
P_p	průměrný výkon
Q	celkový elektrický náboj
q	elektrický náboj
Q	teplo
R	molární plynová konstanta
$\boldsymbol{r}$	polohový vektor
R	poloměr

s	dráha
S	entropie
S	plocha
s	sečna
s_0	počáteční dráha
t	čas
t	tečna
T	termodynamická teplota
U	elektrické napětí
U	vnitřní energie
V	objem
v	rychlost
v_0	počáteční rychlost
v_p	průměrná rychlost
W	práce
δ	chyba
ρ	objemová hustota elektrického náboje
σ	plošná hustota elektrického náboje
τ	lineární hustota elektrického náboje
φ	elektrický potenciál
$\mathcal{E}$	energie

Poznámka:

V textu jsou zavedené fyzikální veličiny a jednotky označovány podle pravidel ve fyzice.

Úvod

V současném moderním světě jsou stále více oblíbené humanitní předměty, filosofie, sociologie a cizí jazyky. Na druhé straně klesá oblíbenost matematiky a fyziky.

Výzkum TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) je projekt mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání. Poskytuje učitelům důležité informace o úrovni vědomostí a dovedností žáků v matematice a přírodních vědách. V roce 2007 se výzkumu TIMSS, který se zaměřil na devítileté a třináctileté žáky, kromě ČR účastnilo dalších 58 zemí z celého světa. Výsledek z roku 2007 můžeme porovnat s výsledkem z roku 1995, kdy se ČR také účastnila. Zatímco v roce 1995 patřili žáci 4. a 8. ročníků v matematice mezi nejúspěšnější, v roce 2007 je zachycen silný pokles. Výsledek v matematice ve 4. ročnících je podprůměrný. Zhoršení je nejvýraznější ze všech zúčastněných zemí. Žáci 8. ročníků byli v matematice průměrní. Výsledky potvrzují domněnku, že matematika se stává stále více neoblíbeným předmětem.

Cílem diplomové práce je jednak poukázat na vzájemnou propojenost matematiky a fyziky a jednak naznačit možnosti, jak zvýšit atraktivnost matematiky u studentů středních škol, a to například prostřednictvím úloh s reálným kontextem.

Součástí diplomové práce je vedle souboru úloh i jejich praktické ověření na vybrané střední škole. Z provedeného pedagogického experimentu se pokusíme vyvodit závěry, zda žáci dokáží aplikovat matematickou analýzu na úlohy s fyzikální tématikou.

1 Teoretická část

1.1 Vývoj matematické analýzy

Matematika a fyzika spolu neodmyslitelně souvisí. Počátky matematiky sahají až do pravěku. Na základě praktických potřeb lidské společnosti, jako bylo obchodování, vyměřování pozemků a staveb, předpovídání astronomických jevů apod., došlo k rozvoji matematiky. Fyzika se začala vyvíjet ve starověku jako součást filozofie. Pozorování a vytváření úvah byly dosud jedinou metodou poznání užívaných ve fyzice.

Prudký rozvoj matematiky a fyziky nastal v renesanci, kde se objevily počátky matematizace fyziky. S nástupem nových metod poznání se fyzika už neobešla bez aparátu matematiky.

Podle ([5], s. 75) nejpropracovanější částí fyziky se v 17. století stává mechanika. Zkoumání pohybu v jeho nejjednodušší formě umožňovalo použití matematického aparátu v daleko větší míře než v ostatních odvětvích fyziky. Podle ([22], s. 97) byla mechanika jediná známá přírodní věda s jistým stupněm systematické výstavby. Protože matematika tvořila klíč k pochopení mechaniky, stala se nejdůležitějším pomocným prostředkem pro porozumění vesmíru. Isaac Newton vydává jedno z nejvýznamnějších děl v dějinách fyziky, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Matematické základy filosofie přírody). Vyslovuje tři Newtonovy zákony o pohybu.

Podle ([12], s. 133) jsou za zakladatele matematické analýzy považováni Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz. Newton vytvořil matematickou analýzu jako nástroj, který potřeboval pro své fyzikální výpočty. Zápis a způsob práce se od dnešního užití velmi lišil. Podle ([18]) jsou hlavními pojmy v Newtonově pojetí fluenty, fluxe a momenty. Pod fluentou se rozumí tekoucí (proměnná) veličina, která je spojena s fluxí (rychlostí svého toku). Tekoucí veličina monotónně roste nebo klesá, stejně jako dráha opisovaná tělesem. V dnešní matematické analýze primitivní funkce koresponduje s fluentou a derivace s fluxí. Moment označuje nekonečně malý přírůstek veličiny. Jeho výklad je založen na kinematických představách. Newton zanedbává integrační konstantu. Na počátku pohybu je dráha nulová, proto počáteční hodnoty fluent jsou rovny nule.

Podle ([13], s. 131) vychází Newtonovo pojetí matematické analýzy z klasických představ fyziky o prostoru, čase a pohybu. Čas je chápán jako absolutně nezávislá proměnná. Fluenta je chápána jako veličina závislá na čase, fluxe jako rychlost časové změny veličiny. U Newtona každá funkce měla derivaci stejně jako každý pohyb má rychlost. Veličina se ke své limitě přibližuje monotónně, stejně jako pohybující se těleso se přibližuje k nějakému bodu pouze z jedné strany.

Podle ([10], s. 279) o pár let později prezentoval Leibniz svůj objev matematické analýzy pod názvem *Nova methodus pro Maximis et minimis*, který byl založen na jiném základě než uváděl Newton. Základními pojmy požívané Leibnizem jsou diferenciál a integrál funkce. Diferenciál funkce byl vyložen jako její nekonečně malý přírůstek a pod integrálem funkce se rozuměl součet nekonečného počtu nekonečně malých diferenciálů této funkce. Zavedl dodnes užívanou symboliku. Pro integrál znak odpovídající zkratce písmene představující sumu.

Podle ([24]) *„Newton uvažoval proměnné měnící se s časem. Leibniz proměnné x, y chápal jako rozsahy posloupností nekonečně blízkých hodnot. Leibniz věděl, že podíl diferenciálů dy/dx je tečnou funkce, ale tuto vlastnost nevyužil*“. Leibniz chápal integraci jako součet přírůstků. Používal přírůstky dx a dy tam, kde Newton používal x' a y' jako konečné rychlosti. Leibniz ani Newton neznali pojem funkce, ale uvažovali již jejich grafy. Mezi oběma výklady existuje jistá spojitost. Newtonovu momentu odpovídá Leibnizův diferenciál, Newtonově fluentě Leibnizův integrál, Newtonově fluxi podíl Leibnizových diferenciálů.

Podle ([17], s. 199) nastal mezi oběma muži konflikt o prvenství objevu diferenciálního a integrálního počtu, který se vlekl mezi roky 1646 až 1716.

Newton přichází s první zmínkou o infinitesimálním počtu roku 1667. Ale jeho nevřelý vztah k publikování svých objevů zbrzdil uveřejnění. Leibniz uvedl svůj článek o objevu ve sborníku Acta Eruditorum v roce 1684. Nikdo dnes nepochybuje, že ke stejnému cíli došli oba různými cestami a na sobě zcela nezávisle. Vleklý spor o objev diferenciálního a integrálního počtu oficiálně uzavřela Royal Society, když si od ní Leibniz vyžádal objektivní stanovisko. V závěrečné správě komise, která byla stanovená prezidentem společnosti – Newtonem, byl Leibniz označen za plagiátora.

Uveřejnění Leibnizova výkladu infinitesimálního počtu zahájilo období tvůrčí práce řady matematiků. Na Leibnize navázali bratři Bernoulliové, kteří přijali jeho metody.

Matematická analýza se do konce 19. století značně rozvinula. „*Velmi dlouho trvalo, než se přišlo na to, že existence derivace, diferenciálu a integrálu nemůže být postulována na základě vnějších úvah, ať kinematických či geometrických, ale čistě analyticky z vlastností funkce a vlastností číselných množin, které funkce spojuje* (viz [18])“.

1.2 Diferenciální a integrální počet v dnešní středoškolské matematice

Záměrem kapitoly je shromáždit vybrané matematické pojmy diferenciálního a integrálního počtu v rozsahu běžném dnes na střední škole. Poznamenejme zde, že diferenciální a integrální počet není dnes běžně součástí vyučovacích hodin matematiky na všeobecných středních školách, je však vyučován v rámci volitelných předmětů, například matematických seminářů apod.

<u>Limita funkce</u>

Limita je stěžejním pojmem diferenciálního a integrálního počtu. Díky limitě je možné přesně popsat řadu dalších pojmů, například derivaci a integrál.

Na obrázku 1.1 je znázorněna obecná funkce $y = f(x)$, bod a není v $D(f)$. Na ose y nenajdeme k bodu a funkční hodnotu $f(a)$, ale můžeme určit bod L. K libovolně velkému ε – okolí bodu L najdeme δ – okolí bodu a tak, že pro všechny body x, které leží v δ – okolí bodu a, kromě bodu a, patří funkční hodnoty $f(x)$ do ε – okolí bodu L. Pro čísla x, která jsou velmi blízká k bodu a, jsou funkční hodnoty $f(x)$ velmi blízko k číslu L. Bod L nazveme limitou funkce v bodě a. Funkce má v bodě a nejvýše jednu limitu (tzn. jednu nebo žádnou).

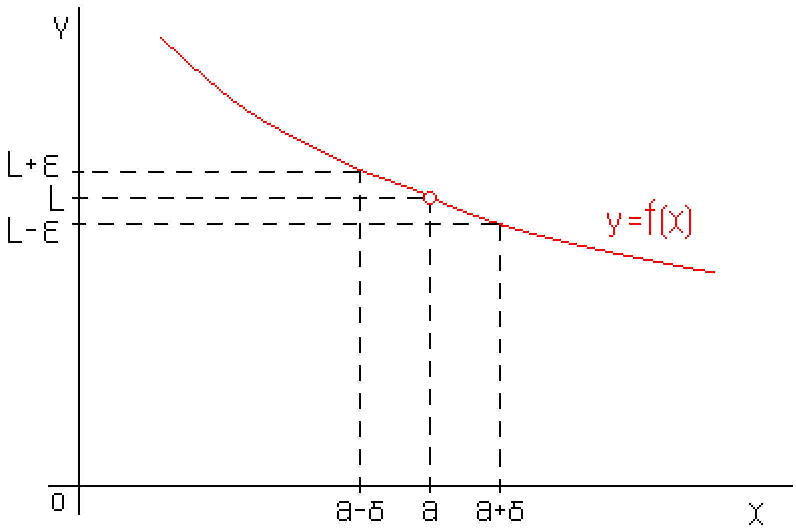
Podle ([11], s. 40) má funkce $y = f(x)$ v bodě a limitu L, jestliže:

1) je definována pro všechna x z nějakého okolí bodu a
2) ke každému (libovolně malému) číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \neq a$ z δ – okolí bodu a náleží odpovídající funkční hodnoty $f(x)$ do ε – okolí bodu L.

S využitím matematické symboliky můžeme definici napsat následovně:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in R :$$

$$\left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right)$$



Obrázek 1.1: Limita funkce v bodě *a*

Derivace funkce

Pomocí derivace se například vyšetřují průběhy funkcí, sestrojují grafy funkcí, řeší se úlohy na hledání extrému atd.

Na obrázku 1.2 je graf funkce $y = f(x)$. Označili jsme tečnu t v dotykovém bodě T $[x_0, f(x_0)]$ a sečnu s určenou bodem T a bodem S $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$. Směrový úhel tečny je označen α a směrový úhel sečny má symbol φ.

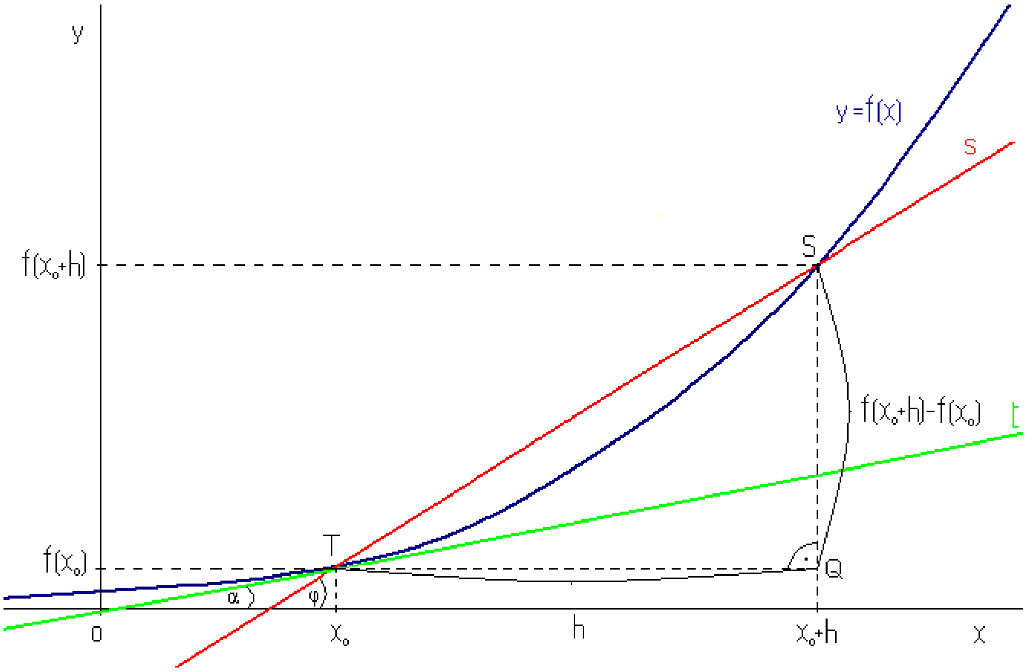
Podle ([23], s. 12) platí pro směrnici sečny k_s (z trojúhelníku STQ) vztah:

$$k_s = tg\varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Podle ([3], s. 12) se stane ze sečny s tečna v okamžiku, kdy bod S přejde po části grafu funkce $y = f(x)$ do bodu T. Přitom se stále zmenšuje hodnota h.

Pro směrnici tečny platí:

$$k_t = tg\alpha = \lim_{S \to T} tg\varphi = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Obrázek 1.2: Derivace funkce

Derivaci funkce značíme $y = f(x)$ v bodě x_0 $f'(x_0)$ a definujeme ji:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Pojem derivace funkce v bodě označuje konkrétní reálné číslo, popř. $\pm\infty$, zatímco pojem derivace funkce v obecném bodě označuje funkci f'.

<u>Neurčitý integrál</u>

Na otevřeném intervalu I jsou definovány funkce $F(x)$ a $f(x)$. Funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v otevřeném intervalu I, jestliže pro všechna $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, pak také funkce $F + c$ je primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, kde c je libovolná konstanta $\in$ R. Neurčitý integrál je chápán jako množina všech primitivních funkcí.

Ke každé funkci spojité v intervalu existuje v intervalu primitivní funkce.

Podle ([11], s. 146) se pro označení neurčitého integrálu obvykle používá zápis

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

kde funkci $f(x)$ nazýváme integrandem, symbol $\int$ integračním znakem, c integrační konstantou, symbol dx slouží k odlišení integrační proměnné x od případných parametrů. Úkon určit primitivní funkci $F(x) + c$ k dané funkci $f(x)$ nazýváme integrování nebo také integraci funkce $f(x)$. Symbol $\int f(x)dx$ se také nazývá neurčitý integrál. Úlohu najít k dané funkci funkci primitivní potom formulujeme jako výpočet neurčitého integrálu dané funkce.

Určitý integrál

Určitý integrál se užívá například k výpočtu obsahu rovinných útvarů, objemu rotačních těles, dráhy přímočarého pohybu, vykonané mechanické práce atd.

Podle ([3], s. 40) jsou na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ definovány funkce F a f. Jestliže pro každé $x \in (a,b)$ platí $F'(x) = f(x)$, pak funkce F je primitivní funkcí k funkci f na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$, přičemž derivací funkce F v bodě a rozumíme derivaci v bodě a zprava a derivaci funkce F v bodě b zleva.

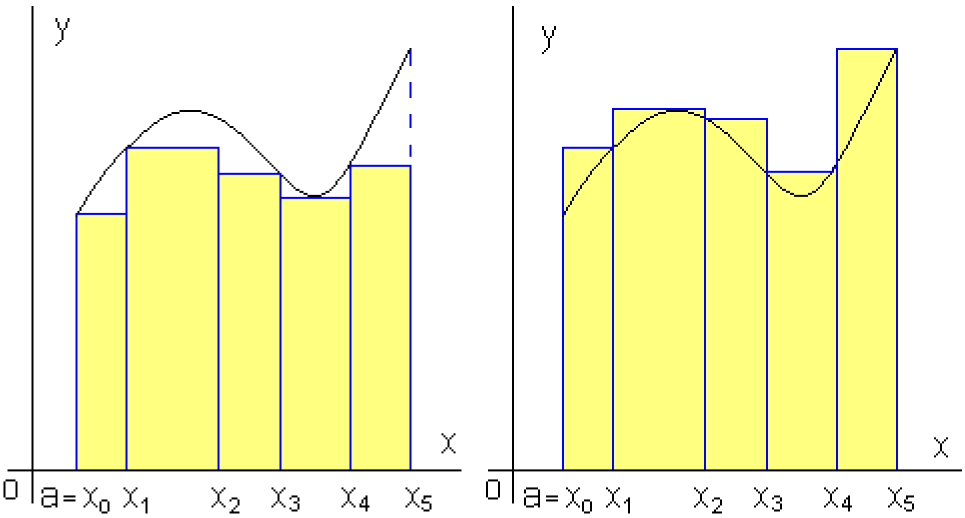
Podle ([19], s. 342) je dána funkce $f(x)$, která je spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$. Provedeme dělení intervalu $\langle a,b \rangle$ body x_i $(0 \le i \le n)$ takovými, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, na n dílčích uzavřených intervalů $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, $\ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$. Toto dělení označíme D_n. Označíme m_i absolutní minimum a M_i absolutní maximum funkce $f(x)$ v i-tém intervalu.

Utvoříme tzv. dolní součet

$$s(D_n) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

a tzv. horní součet

$$S(D_n) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$



Obrázek 1.3: Geometrický význam dolních a horních součtů

Na obrázku 1.3 je zřejmý geometrický význam dolních a horních součtů. Pro každé dělení D_n je $m_i \le M_i$, a tedy $s(D_n) \le S(D_n)$. Pak existuje právě jedno číslo I takové, že pro jakkoliv zvolené dělení D_n platí $s(D_n) \le I \le S(D_n)$, takže $I = \lim_{n\to\infty} s(D_n) = \lim_{n\to\infty} S(D_n)$. Společná limita posloupnosti dolních součtů a posloupnosti horních součtů pro počet dělicích bodů $n \to \infty$ (čili max $\Delta x_i \to 0$) se nazývá určitý integrál funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Určitý integrál funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a,b \rangle$ se značí:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Číslo a se nazývá jeho dolní mez, číslo b horní mez.

Na rozdíl od neurčitého integrálu, který představuje množinu primitivních funkcí, je určitý integrál určité číslo.

Vztah mezi určitým a neurčitým integrálem pro funkce spojité v uzavřeném intervalu udává věta Newton-Leibnizova:

Je-li $f(x)$ funkce spojitá v $\langle a,b \rangle$ a je-li $F(x)$ libovolná funkce k ní primitivní (a spojitá v $\langle a,b \rangle$), pak platí

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Newton-Leibnizova věta slouží k výpočtu určitých integrálů. Přitom se pravá strana zpravidla značí symbolem $[F(x)]_a^b$, takže platí

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice nejsou zpravidla součástí matematické analýzy ve všeobecné střední škole. Mohou však být zařazeny jako nadstandardní téma.

Jedná se o matematickou rovnici, ve které vystupují jako neznámé funkce y a jejichž derivace je v rovnici též obsažena.. Obecně můžeme zapsat diferenciální rovnici n-tého řádu ve tvaru:

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$$

Při řešení úloh ve fyzice se často využívají diferenciální rovnice. Jejich aplikace nalezneme ve fyzice, chemii, ekonomických vědách apod.

Diferenciální rovnice rozdělujeme na dva základní typy:
Obyčejné diferenciální rovnice, které obsahují obyčejné derivace hledané funkce, a parciální diferenciální rovnice, které obsahují parciální derivace.

Podle řádu se diferenciální rovnice dělí na diferenciální rovnice prvního řádu a diferenciální rovnice vyšších řádů.

Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu je rovnice typu $y' = f(x, y)$. Funkce $g(x)$ definovaná v nějakém intervalu I, která má v I derivaci, se nazývá řešením diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$, jestliže pro každé $x \in I$ je $g'(x) = f(x, g(x))$. Obecným řešením rovnice $y' = f(x, y)$ v intervalu I nazveme funkci $g(x, c)$ definovanou i se svou derivací na intervalu I, pro něž $g'(x, c) = f(x, g(x, c))$, $c \in \mathrm{R}$.

Nechť $y' = f(x, y)$ je diferenciální rovnice a bod $A = [a, b]$ z definičního oboru $\mathrm{D}(f)$. Pak úloha nalezení řešení této rovnice splňující počáteční podmínku $y(a) = b$ se nazývá Cauchyho úlohou (počáteční úlohou). Podmínka $y(a) = b$ se nazývá počáteční podmínkou.

Nechť je dána diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$. Funkce $y = g(x, c)$, $c \in R$, se nazývá obecným řešením rovnice $y' = f(x, y)$ jestliže platí:

1) Pro každé $c \in M$ pevně dané, je funkce $y = g(x, c)$ proměnné x řešením rovnice $y' = f(x, y)$.
2) Ke každému řešení $y = \varphi(x)$ rovnice $y' = f(x, y)$ existuje číslo $c \in R$ tak, že $\varphi(x) = g(x, c)$, pro každé $x \in D(\mathrm{g})$

Každé konkrétní řešení pro $y = \varphi(x)$ pro jednoznačně zvolené c nazýváme partikulárním řešením diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$.

Následující úloha je ukázka řešení diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Jedná se o rovnici tvaru $y' = u(x) \cdot v(y)$, kde u, v jsou spojité funkce jedné reálné proměnné na nějakých otevřených množinách. Hledáme, zda existuje singulární řešení rovnice $y' = u(x) \cdot v(y)$, tj. řešení $v(y) = 0$. Je-li toto řešení již obsaženo v obecném řešení při vhodné volbě konstanty, singulární řešení neexistuje.

$$y' = \frac{y}{x} \text{, kde } x \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \text{, kde } y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C \text{, kde } \ln C \text{ je obecná konstanta}$$

$$y = C \cdot x$$

Funkce $y = C \cdot x$ je obecným řešením diferenciální rovnice $y' = \frac{y}{x}$. Singulární řešení neexistuje, neboť singulární řešení $y = 0$ je již obsaženo v obecném řešení při volbě konstanty $C = 0$.

1.3 Soubor fyzikálních pojmů a vztahů učiva SŠ

Fyzikální vztahy užívané na středních školách jsou mnohdy příliš zjednodušovány následkem nedostatečné znalosti matematiky. Zaměřili jsme se na všeobecně vzdělávací školy, tedy gymnázia. Záměrem kapitoly je shromáždit fyzikální pojmy a vztahy běžně užívané v hodinách fyziky, interpretovat je pomocí matematické analýzy a poukázat na úzké propojení fyziky a matematiky.

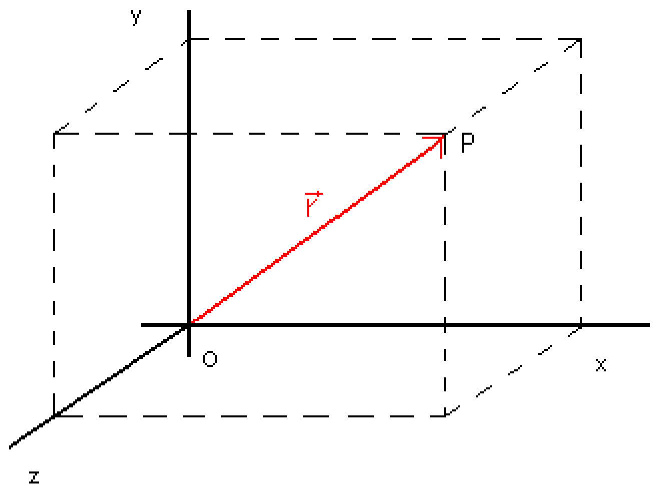
1.3.1 Mechanika – pojmy a vztahy učiva SŠ

Mechanika je obor fyziky, který se zabývá mechanickým pohybem, tzn. přemísťováním těles v prostoru a čase. Bývá vstupní disciplínou fyzikálních kurzů na všech úrovních. Tato role je jí přisouzena pro její názornost a přístupnost lidskému smyslovému vnímání. V mechanice jsou poloha, rychlost, zrychlení, síla, energie a hybnost nejčastěji používané fyzikální veličiny. Tělesa nahrazujeme tzv. hmotným bodem. Jedná se o myšlený bod o stejné hmotnosti. Můžeme ji rozdělit na dva obory, kinematiku a dynamiku. Kinematika se zabývá popisem pohybu těles. Dynamika zkoumá příčiny pohybu.

Trojrozměrný pohyb

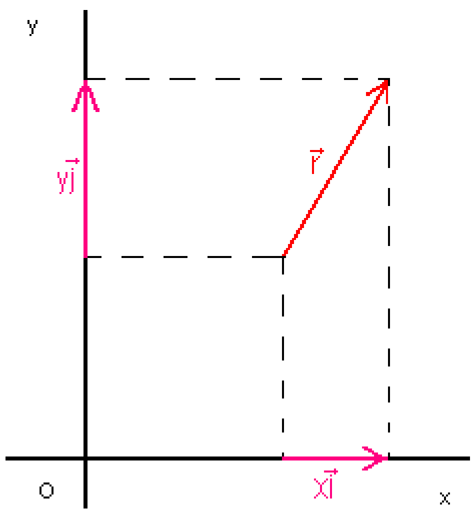
Polohu hmotného bodu určujeme v soustavách souřadnic, například v polární, válcové atd. V textu používáme pravoúhlou soustavu souřadnic, kterou spojujeme se zvolenou vztažnou soustavou. Příkladem může být kartézská soustava souřadnic $Oxyz$, kterou spojíme se stěnami a podlahou místnosti.

Pomocí polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ určíme polohu hmotného bodu. Vektor $\boldsymbol{r}$ znázorňujeme orientovanou úsečkou. Její počáteční bod O umístíme do počátku soustavy souřadnic a koncový bod *P* do uvažovaného hmotného bodu (obrázek 1.4). Souřadnice polohového vektoru ***r*** = (*x*, *y*, *z*) jsou totožné se souřadnicemi hmotného bodu.



Obrázek 1.4: Polohový vektor v prostoru

Polohový vektor můžeme zapsat rovnicí ***r*** = x***i*** + *y****j*** + *z****k***, kde *x****i***, *y****j***, *z****k*** jsou jeho průměty do souřadnicových os. V dvourozměrném prostoru polohový vektor zapisujeme ***r*** = x***i*** + *y****j*** (obrázek 1.5). Vektory ***i***, ***j***, ***k*** jsou jednotkové a definují kartézskou soustavu souřadnic.



Obrázek 1.5: Průměty vektoru ***r*** = x***i*** + *y****j***

Při mechanickém pohybu hmotný bod postupně prochází různými polohami. Souhrn všech poloh, kterými hmotný bod prochází, se nazývá trajektorie. Je to křivka, po které se pohybuje hmotný bod. Určíme ji pomocí polohového vektoru $\boldsymbol{r}$, který vyjádříme jako funkci času, tzn. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Rovnici trajektorie zapisujeme ve tvaru $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$.

Při popisu pohybu hmotného bodu nás zajímá nejenom trajektorie, ale i její délka. Dráha hmotného bodu je délka (velikost) trajektorie, kterou hmotný bod opíše za určitou dobu. Dráha je funkcí času, což obecně zapisujeme vztahem $s = s(t)$.

Okamžitá rychlost

Okamžitá rychlost je vektorová fyzikální veličina, která určuje velikost rychlosti i směr pohybu. Udává, jak rychle se mění v daném okamžiku poloha hmotného bodu s časem.

Na střední škole je většinou průměrná rychlost zavedena dříve než okamžitá rychlost:

Podle ([2], s. 35) se velikost rychlosti zpravidla během pohybu mění. Příkladem může být jízda automobilu. Nejprve se rozjíždí, v zatáčkách zpomaluje a na konci jízdy brzdí až zastaví. Na jednotlivých úsecích trajektorie můžeme určit průměrnou rychlost. Trajektorii rozdělíme na úseky o délce Δs a určíme doby Δt, za které vozidlo urazí jednotlivé úseky. Velikost průměrné rychlosti na daném úseku je dána vztahem

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Průměrná rychlost závisí na délce časového intervalu, ve kterém ji měříme. Jestliže zvolíme velmi malý časový interval, hmotný bod pak urazí velmi malou dráhu. Průměrná rychlost ve velmi malém časovém intervalu na velmi malém úseku trajektorie se nazývá okamžitá rychlost.

Okamžitá rychlost je definována jako podíl

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t},$$

kde předpokladem je, že Δt je velmi malé.

Po zavedení limity a derivace, které se v běžně na střední škole nezavádějí, přesněji definujeme okamžitou rychlost. Podle ([20]) můžeme limitním přechodem z průměrné rychlosti okamžitou rychlost vyjádřit

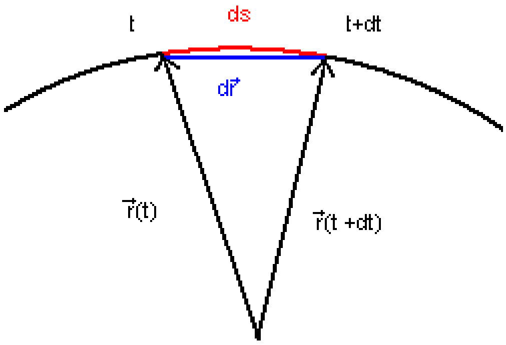
$$\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \tag{1.1}$$

V rovnici časový přírůstek Δt, měřený od okamžiku t, zmenšujeme bez omezení k nule. Průměrná rychlost měřená v intervalu od t do $t + \Delta t$ se s poklesem hodnoty Δt blíží jisté limitní hodnotě, která pak definuje rychlost v okamžiku t.

Velikost okamžité rychlosti vypočítáme ze vztahu

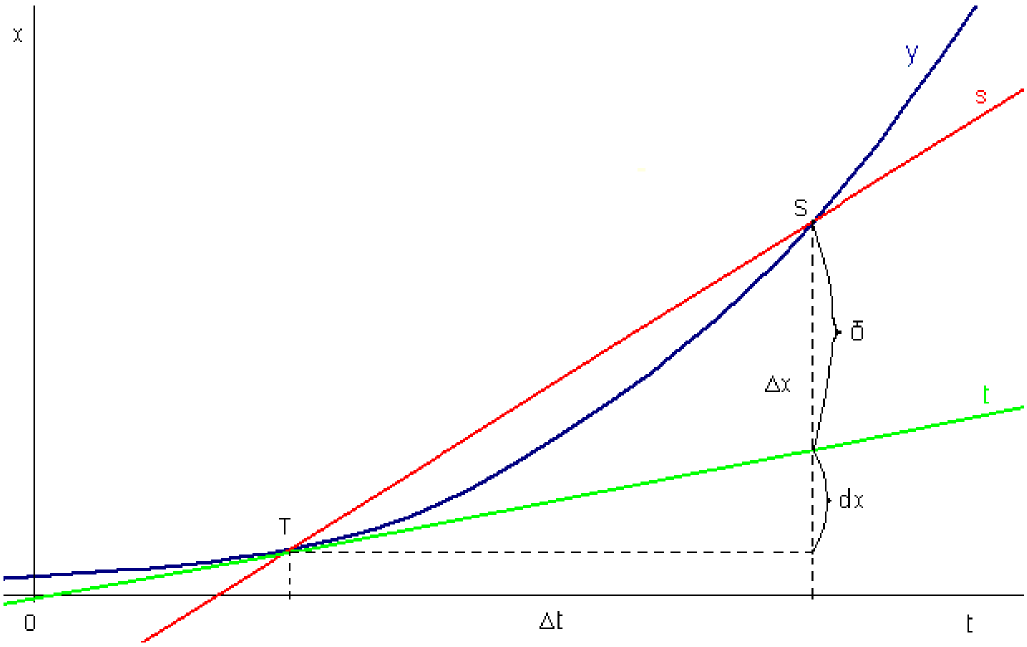
$$|\boldsymbol{v}(t)| = v(t) = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} \tag{1.2}$$

Rozdílný význam elementu ***dr*** a *ds* je graficky znázorněn na obrázku 1.6.



Obrázek 1.6: Grafické znázornění ***dr*** a *ds*

Průměrná rychlost je určena jako směrnice přímky s spojující dva body grafu, které odpovídají počátečnímu a koncovému okamžiku daného intervalu. Okamžitá rychlost je rovna směrnici tečny t ke křivce, která popisuje pohyb tělesa. Z obrázku 1.7 je zřejmé, že Δx je skutečná hodnota a dx přibližná hodnota. Platí vztah $\Delta x \neq dx$ neboť $\Delta x = dx + \delta$, kde δ je chyba. Pokud budeme stále zmenšovat Δt, pak se ze sečny s v jistém okamžiku stane tečna t.



Obrázek 1.7: Grafické znázornění průměrné a okamžité rychlosti

Okamžité zrychlení

Zrychlení $\boldsymbol{a}$ je vektorová veličina, která určuje změnu vektoru rychlosti. Jeho znalost umožňuje předpovídat pohybový stav hmotného bodu v příštím okamžiku.

Podle ([2], s. 45) se ve středoškolské fyzice zavádí okamžité zrychlení vztahem, kde doba Δt je velmi malá:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Podle ([20]) můžeme s užitím matematické analýzy okamžité zrychlení vyjádřit jako derivaci rychlosti

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \tag{1.3}$$

Okamžité zrychlení $\boldsymbol{a}$ rozkládáme na dvě navzájem kolmé složky. Jedna ze složek má směr tečny k trajektorii v daném bodě a nazýváme ji tečné zrychlení $\boldsymbol{a}_t$. Druhá ze složek je k tečně kolmá, má tedy směr normály a nazýváme ji normálové zrychlení $\boldsymbol{a}_n$.

Podle ([4], s. 162) spojením rovnic (1.1) a (1.3) dostaneme

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{1.4}$$

Od vektorové funkce $\boldsymbol{r}(t)$ postupujeme k $\boldsymbol{v}(t)$ a $\boldsymbol{a}(t)$ pomocí derivace. Naopak, když známe průběh $\boldsymbol{a}(t)$, dospějeme k $\boldsymbol{v}(t)$ a $\boldsymbol{r}(t)$ integrováním. Integrujeme-li rovnici (1.4) podle času od t_1 do t_2, dostaneme vztah

$$\boldsymbol{v}(t_2) = \boldsymbol{v}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t) \cdot dt$$

Integrujeme-li rovnici (1.2) nebo provedeme-li dvojí integrování rovnice (1.4) podle času od t_1 do t_2 získáme vztah pro výpočet dráhy hmotného bodu mezi časovými účinky t_1 a t_2, který je definován:

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left|\mathbf{v}(t)\right| \cdot dt$$

Jestliže velikost rychlosti je konstantní, například v = 10 m·s^{-1} můžeme dráhu spočítat jako

$$s\,(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left|\mathbf{v}(t)\right| \cdot dt \;= 10\int_{t_1}^{t_2} dt = 10\cdot \left[t\right]_{t_1}^{t_2} = 10\cdot(t_2 - t_1)$$

Klasifikace mechanických pohybů

Mechanický pohyb rozdělujeme do skupin podle různých kritérií, například podle tvaru trajektorie, velikosti rychlosti nebo podle dimenze prostoru, v němž pohyb probíhá.

Podle tvaru trajektorie

Podle kritéria tvaru trajektorie rozdělujeme pohyby na přímočaré a křivočaré. U přímočarých pohybů je trajektorií přímka. Křivočaré pohyby nemají trajektorii přímku ale obecnou křivku.

Podle velikosti rychlosti

Kritérium velikosti rychlosti rozděluje pohyby na rovnoměrné a nerovnoměrné.

Při rovnoměrném pohybu se velikost rychlosti s časem nemění. Může se měnit směr vektoru rychlosti. Nejjednodušším rovnoměrným pohybem je rovnoměrný přímočarý pohyb. Při tomto pohybu je trajektorií hmotného bodu přímka a rychlost má směr přímky, po níž se hmotný bod pohybuje.

Při nerovnoměrném pohybu se velikost rychlosti mění s časem. V závislosti na velikosti tečného zrychlení můžeme pohyby rozdělit na zrychlené nebo zpomalené. U rovnoměrně zrychleného pohybu má tečné zrychlení stejný směr jako rychlost (rychlost se zvětšuje). U rovnoměrně zpomaleného pohybu má tečné zrychlení opačný směr než rychlost (rychlost se zmenšuje).

Rovnoměrný přímočarý pohyb

Tento pohyb je charakterizován nulovým zrychlením $a = 0$ m·s^{-1}. Z tohoto vyplývá, že rychlost je konstantní. Pohyb je dán jeho počáteční rychlostí v_0. Ověříme výpočtem:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a \cdot dt$$

$$dv = 0 \cdot dt$$

$$v = \int 0 \cdot dt$$

$$v = v_0$$

Při rovnoměrném přímočarém pohybu se dráha mění přímo úměrně v závislosti na čase. Konstantou úměrnosti je rychlost. Odvodíme vztah pro výpočet dráhy (nepoužíváme zápis pomocí vektorů, neboť bereme rychlost ve směru jedné osy):

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$ds = v \cdot dt$$

$$ds = v_0 \cdot dt$$

$$s = \int v_0 \cdot dt$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t \qquad (1.5)$$

Ve vtahu (1.5) symbol s_0 označuje počáteční dráhu.

Rovnoměrně zrychlený (zpomalený) přímočarý pohyb

Pohyb charakterizuje nenulové zrychlení $a \neq 0$ m·s^{-1}, které je rovnoběžné se směrem pohybu. Mění se jen velikost rychlosti a ne její směr. Rychlost je přímo úměrná času, konstantou úměrnosti je zrychlení. Ověříme výpočtem:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a \cdot dt$$

$$v = \int a \cdot dt$$

$$v = v_0 \pm a \cdot t$$

Pro zrychlený pohyb platí vztah $v = v_0 + a \cdot t$, pro zpomalený pohyb $v = v_0 - a \cdot t$.

Odvodíme vztah pro výpočet dráhy:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$ds = v \cdot dt$$

$$ds = (v_0 \pm a \cdot t) \cdot dt$$

$$s = \int (v_0 + a \cdot t) \cdot dt$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t \pm \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Celková dráha je rovna součtu několika drah, počáteční, dráhy, kterou by hmotný bod urazil, kdyby se pohyboval rovnoměrně a dráhy, kterou by urazil, kdyby zrychloval s nulovou počáteční rychlostí.

Se znalostí derivace a integrálů si lehce můžeme odvodit vztahy pro výpočet rychlostí nebo drah u rovnoměrně přímočarého pohybu a rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu. Studenti, kteří nemají dostatečné znalosti matematické analýzy, se většinou učí jednotlivé vztahy nazpaměť.

Newtonovy pohybové zákony

Síla je fyzikální veličina, která vyjadřuje vzájemnou interakci tělesa s jeho okolím. Můžeme ji zavést pomocí Newtonových pohybových zákonů, které popisují vztah mezi pohybem tělesa a silami, které na těleso působí.

První Newtonův pohybový zákon - zákon setrvačnosti

Označuje sílu za příčinu změn pohybového stavu hmotného bodu. „*Každé těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud není nuceno vnějšími silami tento stav změnit* ([2], s. 78)“.

Druhý Newtonův pohybový zákon - zákon síly

Ze síly dokážeme spočítat zrychlení hmotného bodu. Podle ([15], s. 28) bylo experimentálně dokázáno, že zrychlení hmotného bodu je nepřímo úměrné jeho hmotnosti. Měníme-li hmotnost hmotného bodu, za jinak stejných okolností, je součin $m \cdot \boldsymbol{a}$ konstantní. Newton zavedl vztah

$$F_v = m \cdot \boldsymbol{a} \tag{1.6}$$

Pro případ, že se hmotnost m tělesa mění je zákon síly dán ve tvaru:

$$F_v = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

kde p představuje hybnost a platí $\boldsymbol{p} = m \cdot \boldsymbol{v}$ (1.7)

Je-li hmotnost hmotného bodu konstantní jsou obě formulace zákona síly ekvivalentní, tedy

$$F_v = \frac{d}{dt} m \cdot \boldsymbol{v} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \cdot \boldsymbol{a}$$

Rovnice (1.5) a (1.6) vyjadřuje druhý Newtonův zákon: „*Výsledná síla, působící na hmotný bod je rovna derivaci jeho hybnosti podle času, resp. součinu jeho hmotnosti a okamžitého zrychlení při konstantní hmotnosti* (viz [20]).“

Středoškolská fyzika definuje druhý Newtonův zákon ve tvaru:

$$F_v = m \cdot \boldsymbol{a}$$

respektive

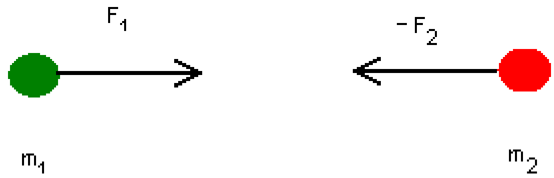
$$F_v = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

Tedy výsledná síla působící na hmotný bod je rovna podílu změny hybnosti hmotného bodu a doby, po kterou síla působila.

Třetí Newtonův pohybový zákon - zákon akce a reakce

Podle ([7], s. 98) vychází zákon z experimentální zkušenosti. Jestliže jedno těleso působí na druhé těleso silou $\boldsymbol{F}_1$, působí také druhé těleso na první silou $-\boldsymbol{F}_2$. Síly mají stejnou velikost a opačný směr. Každá síla působí na jiné těleso, proto se navzájem nemohou zrušit (obrázek 1.8). Libovolně zvolená síla např. $\boldsymbol{F}_1$ se nazývá akce a síla $\boldsymbol{F}_2$ reakce. Tedy platí

$$\boldsymbol{F}_1 = - \boldsymbol{F}_2 \tag{1.8}$$



Obrázek 1.8: Třetí Newtonův zákon - síly akce a reakce

Podle ([15], s. 31) můžeme vyjádřit pohybové rovnice dvou hmotných bodů (obrázek 1.5) ve tvaru (předpokladem je, že se vnější síly působící na hmotné body ve svých účincích navzájem zruší, nebo že zde žádné nepůsobí):

$$F_1 = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \frac{d(m_1\mathbf{v}_1)}{dt}$$

$$F_2 = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d(m_2\mathbf{v}_2)}{dt}$$

Sečtením sil akce a reakce dostaneme

$$F_1 + F_2 = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

V rovnici $\boldsymbol{p}$ označuje celkovou hybnost soustavy a platí $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$.
Podle třetího Newtonova zákona (1.8) můžeme napsat

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \boldsymbol{0}$$

Tzn. že $\boldsymbol{p}$ je konstantní vektor. Při vzájemném působení dvou hmotných bodů, je-li výslednice vnějších sil, působících na soustavu, rovna nule, se celková hybnost zachovává.

Pohybové rovnice

Jedná se o matematicky zapsané fyzikální vztahy, které popisují pohyb hmotného bodu v prostředí. Řešení obvykle není jednoznačné, neboť v prostředí se lze pohybovat více způsoby. Pohyb je určen jednoznačně až po určení počátečních podmínek, například počáteční polohou a rychlostí hmotného bodu.

Vychází se z Newtonových pohybových zákonů. Zákon síly pak dává přímo pohybovou rovnici tvaru

$$\boldsymbol{F_v} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Síla je funkcí polohy (x, y, z), času (t) a rychlosti (v_x, v_y, v_z). Tedy platí

$$\boldsymbol{F_v}\ (x, y, z, t, v_x, v_y, v_z) = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Volný pád hmotného bodu

Na hmotný bod působí pouze gravitační síla $\boldsymbol{F_g} = - m{\cdot}g$ (směrem dolů) ve směru osy y (obrázek 1.9). Ve směru os x a y nepůsobí žádná síla. Tedy platí

$$\boldsymbol{F_v} = \boldsymbol{F_g} = (\ 0, - m{\cdot}g, 0)$$

Další počáteční podmínky, označíme:

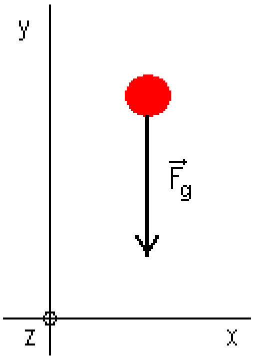
Rychlost $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$

Polohový vektor $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$

Počáteční rychlost v čase $t = 0$ $\boldsymbol{v_0} = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$

Polohový vektor určující počáteční polohu hmotného bodu v čase $t = 0$ $\boldsymbol{r}\ (0) = (x_0, y_0, z_0)$

Souřadnice v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}, x_0, y_0, z_0 považujeme za konstanty.



Obrázek 1.9: Volný pád

Sestavíme pohybové rovnice

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -m \cdot g$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Rovnice vydělíme hmotností *m* a integrujeme, dostaneme

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x}$$

$$\frac{dy}{dt} = -g \cdot t + v_{0y}$$

$$\frac{dz}{dt} = v_{0z}$$

Rovnice opět integrujeme a dostaneme rovnice volného pádu:

$$x = v_{0x} \cdot t + x_0$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t + y_0$$

$$z = v_{0z} \cdot t + z_0$$

Práce

Práce je skalární fyzikální veličina, která se žákům střední školy vysvětluje zpravidla takto:

Jestliže těleso urazí působením konstantní síly $\boldsymbol{F}$ dráhu s, přičemž síla s trajektorií tělesa svírá stálý úhel α, je mechanická práce určena vztahem

$$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$

Jestliže pro úhel α platí $0 \leq \alpha < 90°$ je $\cos\alpha > 0$, práce se koná.

Jestliže pro úhel α platí $90° \leq \alpha < 180°$ je $\cos < \alpha\ 0$, práce se spotřebovává.

Podle ([20]) vyjadřuje práce dráhový účinek síly. Díky znalosti křivkových integrálů můžeme práci W síly F na úseku dráhy od $\boldsymbol{r}_1$ do $\boldsymbol{r}_2$ vyjádřit vtahem

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Po derivaci dostaneme

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1.9}$$

Pak můžeme určit podmínky pro konání práce:

Jestliže platí $dW > 0$ pak $0 \leq \alpha < 90°$, práce se koná.

Jestliže platí $dW = 0$ pak $\alpha = 90°$, práce se nekoná ani nespotřebovává.

Jestliže platí $dW < 0$ pak $90° \leq \alpha < 180°$, práce se spotřebovává.

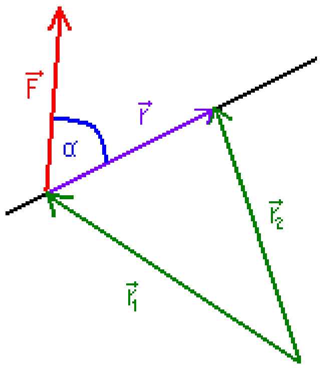
Podle ([15], s. 40) nastává speciální případ pro konstantní sílu $\boldsymbol{F}$ a přímou dráhu s (viz obrátek 1.7). Označíme si vektor

$$\boldsymbol{s} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1,$$

který vyjadřuje celkové posunutí při přímočarém pohybu (obrázek 1.10), pak práci vyjádříme

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \boldsymbol{F} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} = \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = F \cdot s \cdot cos\ \alpha$$

Na střední škole se uvažuje pouze tento speciální případ, neboť žáci předpokládají, že síla působící na těleso je konstantní a dráha pohybujícího se tělesa je přímá. Dráha se silou stále svírá stejný úhel.



Obrázek 1.10: Práce pro konstantní sílu a přímou dráhu

Výkon

Fyzikální veličina, která vyjadřuje, jak rychle se koná práce, se nazývá výkon P.

Na střední škole se fyzikální veličina průměrný výkon a výkon zavádí: Průměrný výkon je podíl práce W a doby t, za kterou se práce vykonala.

$$P_p = \frac{W}{t}$$

Jestliže se práce nekoná rovnoměrně, můžeme určit výkon P jako podíl práce ΔW vykonané za dobu Δt a této doby:

$$P_p = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Průměrný výkon závisí na délce časového intervalu, ve kterém ho měříme. Jestliže zvolíme velmi malý časový interval, vykoná se velmi malá práce. Průměrný výkon ve velmi malém časovém intervalu se nazývá okamžitý výkon.

Podle ([7], s. 156) dostáváme s využitím aparátu matematické analýzy: Když dobu Δt zmenšujeme bez omezení k nule můžeme pak limitním přechodem od průměrného výkonu vyjádřit okamžitý výkon s užitím derivace ve tvaru

$$P(t) = \frac{dW(t)}{dt}$$

Dosadíme vztah (1.9) a dostaneme

$$P(t) = \frac{dW(t)}{dt} = \boldsymbol{F}\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}(t)$$

Okamžitý výkon se rovná součinu síly působící na hmotný bod a okamžité rychlosti hmotného bodu.

Od práce postupujeme k okamžitému výkonu pomocí derivace. Naopak jestliže známe okamžitý výkon dospějeme k práci integrováním. Celkovou práci, která se vykoná v čase od t_1 do t_2, dostaneme ze vtahu

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) \cdot dt$$

Jestliže je výkon P konstantní, platí

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P \cdot dt = P \cdot (t_2 - t_1) = P \cdot \Delta t$$

Doposud jsme definovali výkon jako fyzikální veličinu, která vyjadřuje, jak rychle se koná práce. V obecnějším smyslu lze výkon považovat za veličinu určující, jak rychle dochází ke změnám energie. Hodnota energie je určena stavem fyzikální soustavy nebo objektu, nemá směr, jedná se o skalární veličinu.

Průměrný výkon definujeme

$$P_p = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

V této rovnici ΔE určuje změnu mechanické energie soustavy, ke které došlo působením jisté síly za čas Δt.

Okamžitý výkon síly definujeme jako diferenciální podíl energie a doby

$$P = \frac{dE}{dt}$$

Kinetická energie

Kinetická energie E_k souvisí s pohybovým stavem hmotného bodu. Žákům střední školy je zavedena kinetické energie jako vztah

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

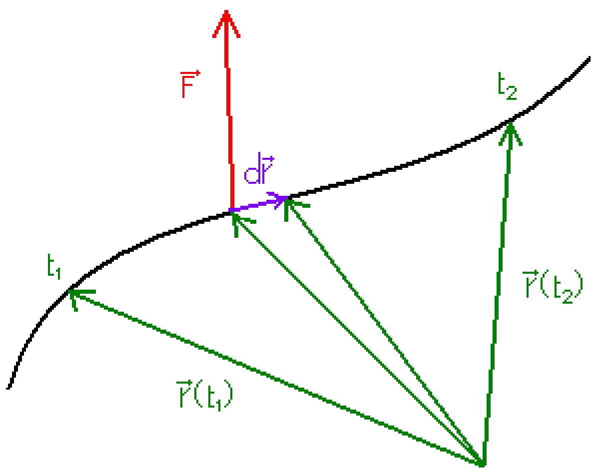
Jedná se o vyjádření kinetické energie hmotného bodu o hmotnosti m, který se pohybuje rychlostí o velikosti v.

Podle ([15], s. 41) určíme kinetickou energii pomocí známého vztahu pro výpočet práce a Newtonových zákonů. Práci na úseku dráhy od $\boldsymbol{r}_1$ do $\boldsymbol{r}_2$ určíme ze vztahu

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Vybereme část trajektorie hmotného bodu od okamžiku t_1 do t_2 (obrázek 1.11). Vypočítáme křivkový integrál po této části trajektorie od $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t_1)$ do $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}(t_2)$ z obou stran rovnice

$$F_v = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$



Obrázek 1.11: Výběr části trajektorie hmotného bodu

Vynásobíme obě strany rovnice elementem trajektorie $\boldsymbol{dr}$ a integrujeme od $\boldsymbol{r}_1$ do $\boldsymbol{r}_2$

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \tag{1.10}$$

Upravíme pravou stranu rovnice

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r}$$

Předpokladem je, že hmotnost *m* je konstantní. Pak platí

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Provedeme substituci $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v} \cdot dt$ v rovnici (1.10). Převedli jsme tím integraci podle $d\boldsymbol{r}$ na integraci podle $d\boldsymbol{v}$. Potom $\boldsymbol{v}_1$ je rychlost v místě $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$ je rychlost v místě $\boldsymbol{r}_2$. Platí

$$m \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^{\,2} - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^{\,2}$$

Fyzikální veličinu, která je vyjádřena ve tvaru

$$\mathrm{E_k} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

nazýváme kinetickou energií hmotného bodu.

1.3.2 Termodynamika – pojmy a vztahy učiva SŠ

Termodynamika je obor fyziky, který se zabývá teplem, tepelnými jevy a vnitřní energií systému tzv. tepelnou energií. Je postavena na třech termodynamických zákonech. Hlavní pojem užívaný v termodynamice je teplota, která je jednou ze sedmi základních fyzikálních veličin v soustavě SI. Existuje jistá dolní hranice dosažené teploty, zvaná absolutní nula (označuje nulu v Kelvinově stupnici).

<u>Teplo a práce</u>

Mezi systémem a jeho okolím se přenáší teplo a práce. Uvažujme za systém plyn ve válci s pohyblivým pístem. Stěny válce jsou z izolačního materiálu. Nedochází tedy k výměně tepla s okolím. Dno válce leží na tepelné lázni (horké plotně).

Systém (plyn) vychází z počátečního stavu, který je popsán tlakem p_1, objemem V_1 a teplotou T_1. Chceme aby přešel do koncového stavu popsaného veličinami p_2, V_2 a T_2. Děj popisující tento přechod se nazývá termodynamický – dochází zde k výměně tepla, teplo může přecházet z lázně do systému nebo naopak.

Zvedáním nebo klesáním pístu koná plyn práci. Plyn zvedne píst silou $\boldsymbol{F}$ a posune ho o vzdálenost ds proti shora působící síle. Předpoklad je, že síla zůstává stejná, neboť posunutí je velmi malé. Velikost síly je

$$F = p \cdot S,$$

kde p je tlak plynu a S plocha pístu.

Pak podle ([8], s. 508) je diferenciál práce vykonané plynem během posunutí dán vztahem

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$$

Velikost diferenciálu práce je

$$dW = p \cdot S \cdot ds = p \cdot dV$$

Práci určíme ze vztahu

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$$

Při změně objemu plynu se mění také teplota a tlak.

Z počátečního do koncového stavu může systém přejít nekonečně mnoha ději. Může nebo nemusí vyměňovat teplo a pro různé děje budou přenesená tepla i vykonané práce různé. Teplo a práce jsou veličiny závislé na tom, jakou cestou děje probíhá. Nazýváme je tedy dějové veličiny.

Podle ([16], s. 131) se při izochorickém ději plyn rozpíná za konstantního objemu. Plyn nekoná práci a veškeré dodané teplo se využije na zvýšení vnitřní energie. Rozpínání plynu za konstantního tlaku nazveme izobarický děj. Plyn vykoná práci

$$W = p \cdot (V_2 - V_1), \text{ kde } p = \text{konst.}$$

Při izotermickém ději se nemění teplota plynu. Jeho práce je dána vztahem

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = n \cdot R \cdot T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1},$$

kde jsme ze stavové rovnice pro ideální plyn

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

vyjádřili tlak p a dosadili do rovnice pro výpočet práce.

<u>Zákony termodynamiky</u>

<u>Nultý zákon termodynamiky</u>

„Je-li každé z těles A i B v tepelné rovnováze se třetím tělesem T, budou v tepelné rovnováze také tělesa A a B navzájem. K očíslování stavů tepelné rovnováhy stačí jediný spojitě proměnný parametr – teplota. (viz [8], s. 497).“

<u>První zákon termodynamiky</u>

Podle ([1], s. 62) se na střední škole uvádí první zákon termodynamiky ve formě:

Přírůstek vnitřní energie soustavy ΔU se rovná rozdílu tepla Q, které odevzdají okolní tělesa soustavě, a práci W, kterou vykonají okolní tělesa působící na soustavu silami. Matematicky vyjádříme tento poznatek rovnicí

$$\Delta U = Q - W,$$

kterou nazýváme první zákon termodynamiky.

Při přechodu z počátečního do koncového stavu závisí vykonaná práce W a vyměněné teplo Q na povaze procesu. Při pokusech bylo zjištěno, že rozdíl $Q - W$ zůstává stejný pro všechny děje. Rozdíl závisí pouze na počátečním a koncovém stavu. Nezávisí na tom, jak se systém mezi stavy vyvíjí.

Rozdíl $Q - W$ představuje změnu vnitřní vlastnosti systému, tzv. vnitřní energii U. Platí

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - W$$

Tato rovnice vyjadřuje první zákon termodynamiky.

Pokud v systému probíhá jen infinitezimální (nekonečně malá) změna, platí první zákon termodynamiky ve tvaru

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q - dW$$

Slovy můžeme tento zákon vyjádřit:

Teplo Q dodané okolím systému zvýší vnitřní energii U systému. Vnitřní energie klesne, vykoná-li systém práci W.

Práci, kterou vykoná systém označujeme záporným znaménkem. Rovnici můžeme přepsat pro práci W, která je dodaná systému. Dostaneme

$$\Delta U = Q + W,$$

respektive

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q + dW$$

Zde platí, že vnitřní energie systému roste, pokud je systému dodána práce nebo pokud systém pohlcuje teplo.

První zákon termodynamiky vylučuje existenci perpetua mobile prvního druhu. Nelze sestrojit stroj periodicky konající práci, aniž by spotřeboval ekvivalentního množství energie jiného druhu.

Entropie

Podle ([8], s. 553) neurčují změny energie v uzavřeném systému směr nevratných dějů. Směr je dán změnou entropie ΔS systému. Entropie závisí pouze na stavu systému a ne na způsobu, jakým se systém do toho stavu dostal. Jedná se tedy o stavovou veličinu systému. Energie uzavřeného systému je konstantní. To neplatí o entropii, neplatí zde zákon zachování. Entropie uzavřeného systému při nevratných dějích stále roste. Přírůstek entropie ΔS systému během děje, který vede z počátečního do koncového stavu, je určen vztahem

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int \frac{dQ}{T}$$

V uvedeném vztahu T označuje termodynamickou teplotu a Q je energie přenesená v podobě tepla do systému nebo ze systému.

Druhý zákon termodynamiky

Vratný děj probíhá z počátečního do koncového stavu a opačně. Původního stavu dosáhneme obrácením pořadí jednotlivých úkonů. Děj, který probíhá pouze jedním směrem nazýváme nevratným. První zákon termodynamiky platí pro oba děje. Druhý zákon termodynamiky je formulován pro nevratné děje.

Jestliže děj nastává v uzavřeném systému, pak entropie systému zůstává konstantní pro děje vratné a roste pro děje nevratné. Entropie uzavřeného systému nikdy neklesá, tzn.

$$\Delta S \geq 0$$

Druhý zákon termodynamiky vyjadřuje experimentální skutečnost, že není možné sestrojit perpetuum mobile druhého druhu, tzn. zařízení, které by cyklickým procesem trvale vykonávalo práci pouze ochlazováním systému.

Podle ([1], s. 111) uvádí středoškolská fyzika pouze slovní formulaci druhého zákona termodynamiky:
Není možné sestrojit periodicky pracující tepelný stroj, který by pouze přijímal teplo od tělesa (ohřívače) a vykonával stejně velkou práci.

Třetí zákon termodynamiky

Podle ([8], s. 572) je při absolutní nule entropie systému nulová. Tento stav je nedosažitelný konečným počtem kroků a můžeme se mu jen přibližovat.

1.3.3 Elektřina a magnetismus – pojmy a vztahy učiva SŠ

Obor fyziky, který zkoumá elektřinu a magnetismus, se nazývá elektromagnetismus. Vědy o elektřině a magnetismu se po staletí rozvíjely odděleně. Až v 19. století se mezi nimi našlo spojení. Zjistilo se totiž, že elektrický proud procházející vodičem vychyluje magnetickou střelku kompasu.

Makroskopický popis rozložení a pohybu náboje

Elektrický náboj je skalární veličina. Je vždy spjat s částicemi. Pohybující se elektrický náboj je popisován pomocí elektrického proudu.

Při zkoumání vlastností elektricky nabitých těles nesledujeme jednotlivé elektrické náboje, které těleso obsahuje. Všechny elektrické náboje daného tělesa považujeme za spojitě rozložené v jeho objemu nebo povrchu. Veličinu popisující spojité rozložení elektrického náboje nazveme hustota elektrického náboje.

Objemová hustota elektrického náboje

Podle ([21]) se jedná o veličinu popisující rozložení elektrického náboje v objemu tělesa. Střední objemová hustota elektrického náboje je definována

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

Jestliže předpokládáme, že objem ΔV lze libovolně zmenšovat, můžeme získat objemovou hustotu náboje v daném bodě tělesa

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$

Symbol $\boldsymbol{r}$ označuje polohový vektor daného bodu. Odtud integrací dostaneme vztah pro celkový náboj tělesa o objemu V

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}) \cdot dV$$

Plošná hustota elektrického náboje

Podle ([21]) pokud je elektrický náboj rozložen na určité ploše (povrchu tělesa), používáme k popisu rozložení elektrického náboje plošnou hustotu elektrického náboje, která je definována

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{dQ}{dS}$$

Integrací dostaneme celkový náboj rozložený na dané ploše

$$Q = \int \sigma(\mathbf{r}) \cdot dS$$

Lineární hustota elektrického náboje

Podle ([21]) v případě rozložení elektrického náboje podél určité křivky zavádíme k popisu rozložení elektrického náboje lineární hustotu elektrického náboje, kterou v daném bodě křivky definujeme vztahem

$$\tau(\boldsymbol{r}) = \frac{dQ}{dl}$$

Integrací vztahu získáme celkový elektrický náboj rozložený podél dané křivky

$$Q = \int \tau(\mathbf{r}) \cdot dl$$

Elektrický proud

Střední škola definuje elektrický proud jako skalární veličinu danou vztahem

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Symbol ΔQ vyjadřuje celkový náboj částic, které projdou za dobu Δt příčným řezem vodiče. Pokud nabité částice procházejí průřezem rovnoměrně a jejich směr se s časem nemění, je elektrický proud konstantní a platí

$$I = \frac{Q}{t}$$

Podle ([9], s. 694) je elektrický proud integrální veličinou. Představuje efektivní množství náboje, které za jednotku času projde orientovanou plochou S. Vyjádříme vztahem

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Odtud dostaneme vztah pro výpočet celkového náboje, který projde plochou S za dobu $\Delta t = t_2 - t_1$. Tedy

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I \cdot dt$$

Při konstantním proudu, nezávislém na čase platí

$$Q = I \cdot \Delta t$$

Hustota elektrického proudu

Podle ([9], s. 696) popisuje hustota elektrického proudu pohyb nosičů náboje. Má stejný směr jako intenzita elektrického pole v daném bodě průřezu vodiče. Její velikost se rovná podílu velikosti procházejícího proudu a velikosti elementární plochy průřezu vodiče, která je kolmá ke směru proudu. Zapíšeme vzorcem

$$j = \frac{dI}{dS}$$

Odtud vyjádříme vzorec pro výpočet proudu

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

Symbol ***dS*** je vektor elementu plochy (kolmý k dané ploše).

Jestliže je proud v celém průřezu vodiče konstantní a jeho směr je rovnoběžný s ***dS***, pak hustota proudu ***j*** je konstantní a rovnoběžná s ***dS***. Potom platí vztah

$$I = \int j \cdot dS = j \int dS = j \cdot S$$

<u>Elektrické napětí</u>

Na střední škole se obvykle zavádí elektrické napětí takto:
Jestliže v bodě A elektrického pole je potenciál φ(A), v bodě B potenciál φ(B), pak jejich rozdíl φ(A) - φ(B) určuje elektrické napětí U.

Podle ([14], s. 17) je elektrické napětí určeno jako práce vykonaná elektrickými silami při přemísťování elektrického náboje mezi dvěma body (A, B) prostoru. Tvrzení vyjádříme vztahem

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}_{el} \cdot d\mathbf{r}$$

Symbol $\boldsymbol{F_{el}}$ zastupuje elektrickou sílu, kterou vyjádříme z definičního vztahu pro intenzitu elektrického pole $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mathbf{F}_{el}}{q}$$

Odtud vyjádříme $\boldsymbol{F_{el}}$, dosadíme do vzorce a dostaneme

$$W_{AB} = \int_A^B q \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \epsilon_{el}(\mathrm{A}) - \epsilon_{el}(\mathrm{B}) = [\varphi(\mathrm{A}) - \varphi(\mathrm{B})] \cdot q$$

Symbol ϵ označuje energii. Nepoužíváme klasické značení E, neboť by docházelo k záměně s elektrickou intenzitou.

Využijeme znalosti ze střední školy:

$$U_{AB} = \varphi(\mathrm{A}) - \varphi(\mathrm{B})$$

Dosadíme a dostaneme

$$W_{AB} = U_{AB} \cdot q$$

Rovnici vydělíme nábojem q a získáme integrální vztah pro výpočet napětí mezi dvěma body elektrického pole

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

2 Aplikace teorie

2.3 Soubor úloh s fyzikální tématikou

Cílem kapitoly je procvičení vztahů a pojmů, které jsou uvedeny v kapitole „Soubor fyzikálních pojmů a vztahů učiva SŠ“. Úlohy jsou vlastním přínosem, stejně tak formulace zadání úloh, které mají být pro čtenáře srozumitelné a lehce představitelné. Úlohy, u nichž je uvedený odkaz, byly převzaty a přepracovány z učebnic fyziky. U všech úloh je uvedený postup řešení.

2.3.1 Mechanika - úlohy

Úloha M1:

Pohyb pouťové atrakce - létající labutě je popsán časově závislým polohovým vektorem $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Kde $x(t) = 4\cdot\cos(0{,}5t)$, $y(t) = 4\cdot\sin(0{,}5t)$, $z(t) = 4$ Určete vektory $\boldsymbol{v}(t)$ a $\boldsymbol{a}(t)$, okamžitou rychlost a zrychlení labutí ([16], s 12).

Řešení úlohy M1:

Vektor okamžité rychlosti určíme podle vztahu

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

Můžeme zapsat po složkách vektoru

$$\boldsymbol{v}(t) = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

Dosadíme za x, y, z ze zadání úlohy

$$\boldsymbol{v}(t) = \left(\frac{d(4\cdot\cos 0{,}5)}{dt}, \frac{d(4\cdot\sin(0{,}5t)}{dt}, \frac{d4}{dt} \right) =$$

$$= (-2\cdot\sin(0{,}5t), 2\cdot\cos(0{,}5t), 0)$$

Vektor okamžitého zrychlení určíme podle vztahu

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$$

Zapíšeme jednotlivé složky vektoru

$$\boldsymbol{a}(t) = \left(a_x, a_y, a_z\right) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$$

Za v_x, v_y, v_z dosadíme hodnoty, které nám vyšly v předchozím výpočtu.

$$\boldsymbol{a}(t) = \left(\frac{d(-2\cdot\sin(0{,}5t))}{dt}, \frac{d(2\cdot\cos(0{,}5t))}{dt}, \frac{d0}{dt}\right) = (-\cos(0{,}5t), -\sin(0{,}5t), 0)$$

Vypočítali jsme vektor okamžité rychlosti a vektor okamžitého zrychlení. Můžeme spočítat velikosti jednotlivých vektorů.

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{((-2\cdot\sin(0{,}5t))^2 + (2\cdot\cos(0{,}5t))^2 + 0^2)} = \sqrt{4\cdot\sin^2(0{,}5t) + 4\cdot\cos^2(0{,}5t)} =$$

$$= \sqrt{4} = 2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{((-\cos(0{,}5t))^2 + (-\sin(0{,}5t))^2 + 0} = \sqrt{\cos^2(0{,}5t) + \sin^2(0{,}5t)} = 1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Pouťová atrakce – létající labutě se pohybuje rychlostí 2 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ se zrychlením 1 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Úloha M2:

Automobil se pohybuje po trajektorii, která je vyjádřená číselnou vektorovou rovnicí $\boldsymbol{r}(t) = 2t^2\boldsymbol{i} - t^3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Určete, jakou vzdálenost auto urazí mezi třetí a pátou sekundou.

Řešení úlohy M2:

K určení velikosti dráhy použijeme vztah

$$s\,(t_1,\, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| \cdot dt$$

Určíme vektor okamžité rychlosti

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d(2t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + \mathbf{k})}{dt} = (4t,\, -3t^2,\, 0)$$

Vypočítáme velikost okamžité rychlosti

$$|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{(4t)^2 + (-3t^2)^2 + 0^2} = \sqrt{16t^2 + 9t^4} = t\sqrt{16 + 9t^2}$$

Dosadíme do vztahu pro výpočet dráhy

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| \cdot dt = \int_3^5 t\sqrt{16 + 9t^2} \cdot dt = \left| \begin{matrix} A = 16 + 9t^2 \\ dA = 18tdt \end{matrix} \right| = \frac{1}{18}\int \sqrt{A} \cdot dA =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{A^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \left[\frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_3^5 = \frac{1}{27}\left[(4 + 9 \cdot 5^2)^{\frac{3}{2}} - (4 + 9 \cdot 3^2)^{\frac{3}{2}} \right] = 99{,}32 \text{ m} \approx 99 \text{ m}$$

Mezi třetí a pátou sekundou automobil urazí 99 metrů.

<u>Úloha M3</u>:

Dva hmotné body se pohybují stejným směrem. Jejich pohyb je popsán rovnicemi $r_1(t) = 3t - 6t^2 + 11t^3$ a $r_2(t) = 4t + 9t^2 - t^3$, kde t je čas v sekundách. Najděte okamžik kdy se hmotné body pohybují se stejným zrychlením. Jaké budou jejich okamžité rychlosti v tomto čase ([16], s. 17)?

<u>Řešení úlohy M3:</u>

Výpočet okamžité rychlosti hmotných bodů provedeme podle vztahu

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

Dostali jsme

$$v_1(t) = \frac{dr_1(t)}{dt} = 3 - 12t + 33t^2$$

$$v_2(t) = \frac{dr_2(t)}{dt} = 4 + 18t - 3t^2$$

Zrychlení získáme derivací rychlosti podle času. Tedy

$$a_1(t) = \frac{dv_1(t)}{dt} = -12 + 66t$$

$$a_2(t) = \frac{dv_2(t)}{dt} = 18 - 6t$$

Hledáme čas t kdy se zrychlení obou hmotných bodů rovná.

$$a_1(t) = a_2(t)$$

$$-12 + 66t = 18 - 6t$$

$$t = \frac{5}{12}\,\mathrm{s} \approx 0{,}4\ \mathrm{s}$$

Čas t dosadíme do rovnic pro výpočet okamžitých rychlostí.

$$v_1(t) = 3 - 12\cdot\frac{5}{12} + 33\left(\frac{5}{12}\right)^2 = 3{,}73\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 3{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$v_2(t) = 4 + 18\cdot\frac{5}{12} - 3\left(\frac{5}{12}\right)^2 = 10{,}98\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 11\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Hmotné body se pohybují se stejným zrychlením v čase 0,4 sekundy. Jejich okamžité rychlosti odpovídají v tomto čase hodnotám 3,7 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$a 11 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

<u>Úloha M4</u>:

Čáry, které rozdělující pole libovolného tvaru na čtyři části, jsou na sebe kolmé. Můžeme je považovat za osy x a y soustavy souřadnic. Na pole vběhla srnka. Její okamžitá poloha vzhledem k této soustavě je dána funkcemi $x = 0{,}25t^2 - 8{,}7t + 20$ a $y = -0{,}38t^2 + 6{,}9t + 18$. Polohový vektor $\boldsymbol{r}$ je tedy tvaru $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$. Určete velikost polohového vektoru, okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení v okamžiku $t = 12$ sekund.

<u>Řešení úlohy M4:</u>

Určíme konkrétní hodnoty složek x a y polohového vektoru v čase t. Dosadíme $t = 12$ s do rovnic v zadání.

$$x = 0{,}25t^2 - 8{,}7t + 20 = 0{,}25\cdot 12^2 - 8{,}7\cdot 12 + 20 = -48{,}4$$

$$y = -0{,}38t^2 + 6{,}9t + 18 = -0{,}38\cdot 12^2 + 6{,}9\cdot 12 + 18 = 46{,}08$$

Tedy pro okamžik $t = 12$ s platí

$$\boldsymbol{r} = (-48{,}4;\ 46{,}08)$$

Vypočítáme velikost polohového vektoru $\boldsymbol{r}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-48{,}4)^2 + (46{,}08)^2} = 66{,}82\ \mathrm{m} \approx 67\mathrm{m}$$

Zjistíme vektor okamžité rychlosti, využijeme vztahu

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \left(\frac{d(0{,}25t^2 - 8{,}7t + 20)}{dt}, \frac{d(-0{,}38t^2 + 6{,}9t + 18)}{dt} \right) =$$

$$= (0{,}5t - 8{,}7;\ -0{,}76t + 6{,}9)$$

Dosadíme za t = 12 sekund

$$\boldsymbol{v}(t) = (-\ 2{,}7;\ -\ 2{,}22)$$

Zjistíme velikost okamžité rychlosti v tomto čase

$$v(t) = \sqrt{(-2{,}7)^2 + (-2{,}22)^2} = 3{,}49\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \approx 3{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Výpočet okamžitého zrychlení provedeme podle vztahu

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right)$$

Dosadíme za v_x a v_y z předchozího výpočtu souřadnic vektoru okamžité rychlosti.

$$\boldsymbol{a}(t) = \left(\frac{d(0{,}5t - 8{,}7)}{dt}, \frac{d(-0{,}76t + 6{,}9)}{dt} \right) = (0{,}5;\ -0{,}76)$$

Vidíme, že zrychlení nezávisí na čase, je konstantní. Dále vypočítáme velikost okamžitého zrychlení.

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0{,}5^2 + (-0{,}76)^2} = 0{,}9\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$$

Velikost polohového vektoru r je 67 metrů. Velikost okamžité rychlost v v daném čase 12 sekund je 3,5 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a velikost okamžitého zrychlení odpovídá 0,9 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

<u>Úloha M5</u>:

Následující čtyři vztahy vyjadřují možnosti zapsání rychlosti hokejového kotouče pohybujícího se v rovině xy. Ve které z uvedených možností je vektor zrychlení konstantní ([7], s. 78)?

1) $\boldsymbol{v} = 5t^2\boldsymbol{i} + (t + 9)\boldsymbol{j}$

2) $v_x = \frac{3}{2}t^2 + 2t - 5,\ v_y = 7t - 3$

3) $\boldsymbol{v} = 6t\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$

4) $v_x = -9,\ v_y = -3t^2 + 1$

<u>Řešení úlohy M5:</u>

Pouze v třetím případě je okamžité zrychlení konstantní, neboť $\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = (6, 0)$. V ostatních případech je vždy jedna složka vektoru závislá na čase.

<u>Úloha M6</u>:

Nákupní vozík je plně naložen potravinami. Jeho celková hmotnost je 200 kg. Chlapec se ho snaží uvést z klidu do pohybu silou 50 N. Určete rychlost a dráhu, kterých vozík dosáhl za dobu 5 s.

<u>Řešení úlohy M6:</u>

K výpočtu využijeme druhý Newtonův zákon. Hmotnost nákupního vozíku se nemění, proto použijeme vztah pro výpočet velikosti výsledné síly

$$F_v = m \cdot a$$

Odtud vyjádříme vztah pro výpočet velikosti zrychlení

$$a = \frac{F_v}{m}$$

Jestliže známe zrychlení, můžeme integrováním vypočítat rychlost

$$v = \int a \cdot dt = \frac{F}{m} \int dt = \frac{F}{m} \cdot t + v_0$$

Vozík se rozjíždí z klidu, tedy počáteční rychlost $v_0 = 0$ m·s^{-1} Pak platí

$$v = \frac{F}{m} \cdot t$$

Dosadíme do vztahu konkrétní hodnoty ze zadání úlohy

$$v = \frac{50}{200} \cdot 5 \text{ m·s}^{-1} = 1{,}25 \text{ m·s}^{-1}$$

Dráhu, kterou urazí vozík určíme podle vztahu

$$s\ (t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left| \mathbf{v}(t) \right| \cdot dt$$

Za velikost rychlosti dosadíme odvozený vztah z předešlého výpočtu.

$$s = \int \frac{F}{m} t \cdot dt = \frac{F}{m} \int t \cdot dt = \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + s_0$$

Počáteční dráha uražená vozíkem $s_0 = 0$ m. Platí tedy

$$s = \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2}$$

Dosadíme hodnoty ze zadání úlohy

$$s = \frac{50}{200} \cdot \frac{5^2}{2} = 3{,}12 \text{ m} \approx 3 \text{ m}$$

Vozík urazí dráhu 3 metry za dobu 5 sekund, na konci pohybu dosáhl rychlosti 1,25 m·s^{-1} .

Úloha M7:

Síla $\boldsymbol{F} = 2t^2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$ působí na částici. Trajektorie částice je vyjádřená rovnicí $\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} + 3t\boldsymbol{j} + 16t\boldsymbol{k}$. Určete velikost práce, kterou síla vykoná mezi okamžiky $t_1 = 1\text{s}$ a $t_2 = 6\text{s}$? Určete průměrný výkon v daném časovém intervalu a okamžitý výkon v časech t_1 a t_2 ([16], s. 35)?

Řešení úlohy M7:

Použijeme vztah pro výpočet práce

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Máme určit práci mezi dvěma okamžiky, proto převedeme integraci podle $d\boldsymbol{r}$ na integraci podle dt.

Víme, že rychlost je určena podílem

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d(t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 16t\mathbf{k})}{dt} = 2t\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 16\boldsymbol{k}$$

Vyjádříme $d\boldsymbol{r}$

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v} \cdot dt$$

$$d\boldsymbol{r} = (2t\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 16\boldsymbol{k}) \cdot dt$$

Provedeme substituci, platí

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \cdot dt = \int_1^6 (2t^2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}) \cdot (2t\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 16\boldsymbol{k}) \cdot dt =$$

$$= \int_1^6 (4t^3 - 15 + 128) \cdot dt = \left[t^4 + 113t\right]_1^6 = 1860\ \text{J}$$

Průměrný výkon vypočítáme podle vztahu

$$P_p = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Velikost práce jsme již určili a $\Delta t = t_2 - t_1$, v našem případě $\Delta t = (6 - 1)$ s.
Dosadíme do vztahu

$$P_p = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{1860}{6}\ \mathrm{W} = 310\ \mathrm{W}$$

Okamžitý výkon určíme z

$$P(t) = \frac{dW(t)}{dt} = 4t^3 + 113$$

Dosadíme konkrétní hodnoty ze zadání úlohy

$$P(1) = (4 + 113)\mathrm{W} = 117\ \mathrm{W}$$

$$P(6) = (4 \cdot 6^3 + 113)\mathrm{W} = 977\ \mathrm{W}$$

Práce kterou síla vykonala mezi zadanými okamžiky má velikost 1860 joulů. Průměrný výkon mezi okamžiky je 310 wattů. Okamžitý výkon v čase jedné sekundy je 117 wattů a v čase šesti sekund je 977 wattů.

<u>Úloha M8</u>:

Plovoucí ledová kra je hnána proudem vody podél břehu řeky. Proud na ni působí silou $\boldsymbol{F} = 55\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{j}$. Počáteční a koncová poloha kry je dána body A = [1; 1], B = [4; 6]. Jak velkou práci vykoná síla při posouvání ledové kry?

<u>Řešení úlohy M8:</u>

Práci určíme ze vztahu

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Jelikož žádná složka síly $\boldsymbol{F}$ není závislá na čase, můžeme sílu považovat za konstantu. Platí

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \boldsymbol{F} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r}$$

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$$

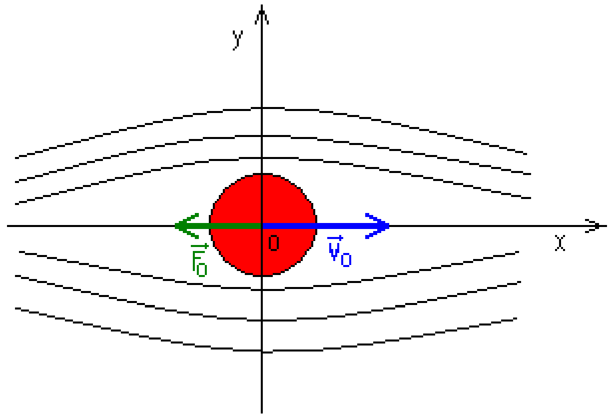
Dosadíme do vztahu pro výpočet práce

$$W = (55\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{j}) \cdot (3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}) = (165 + 150)\ \mathrm{J} = 315\ \mathrm{J}$$

Při posouvání ledové kry síla vykoná práci 315 Joulů.

<u>Úloha M9</u>:

Těleso o hmotnosti m = 10 kg se pohybuje v odporujícím prostředí. Proti směru pohybu tělesa působí síla $\boldsymbol{F_0}$ = - k·$\boldsymbol{v}$, kde k = 5 Nsm^{-1} (obrázek 2.1). Sestavte pohybovou rovnici a zjistěte jak bude rychlost záviset na čase. Jaké rychlosti dosáhne těleso v čase 5 sekund? Počáteční rychlost v_{0x} je 14 m·s^{-1}.



Obrázek 2.1: Pohyb tělesa v odporujícím prostředí

<u>Řešení úlohy M9:</u>

Vypíšeme počáteční podmínky

$$\boldsymbol{F_0} = (-\,k \cdot \boldsymbol{v}, 0, 0)$$

$$\boldsymbol{r}(0) = (0, 0, 0)$$

$$\boldsymbol{v}(0) = (v_{0x}, 0, 0)$$

Použijeme vztah

$$\boldsymbol{F_v} = m \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

V našem případě platí

$$-\mathrm{k}\cdot v = m\cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

Rovnici vydělíme hmotností m a integrujeme

$$-\frac{\mathrm{k}\cdot v}{m} = \frac{dv}{dt}$$

Upravíme a integrujeme

$$-\int \frac{\mathrm{k}}{m}\cdot dt = \int \frac{1}{v}\cdot dv$$

$$-\frac{\mathrm{k}}{m}\cdot t + \mathrm{C} = \ln v \text{, kde } \mathrm{C} = \ln v_{0x}$$

Z rovnice vyjádříme vztah pro rychlost tělesa

$$-\frac{\mathrm{k}}{m}\cdot t + \ln v_{0x} = \ln v$$

$$-\frac{\mathrm{k}}{m}\cdot t = \ln v - \ln v_{0x}$$

$$-\frac{\mathrm{k}}{m}\cdot t = \ln \frac{v}{v_{0x}}$$

$$e^{\frac{-k}{m}\cdot t} = \frac{v}{v_{0x}}$$

$$v = v_{0x}\, e^{\frac{-k}{m}\cdot t}$$

Dosadíme hodnoty ze zadání a zjistíme rychlost tělesa v čase 5 sekund

$$v = 14\cdot e^{-3,5} = 0,42\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 0,4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Těleso se v čase 5 sekund pohybuje rychlostí 0,4 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2.3.2 Termodynamika – úlohy

<u>Úloha T1:</u>

V hrnci z izolačního materiálu je 0,5 litru 100 °C teplé vody. Kuchařka za konstantního tlaku $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa vyvařila vodu na páru stejné teploty. Objem páry je 0,8655 m^3. Během děje horká plotna dodala hrnci teplo 1130 kJ. Jakou práci systém vykonal? Jak se během varu změní vnitřní energie systému?

<u>Řešení úlohy T1:</u>

Práci můžeme vyjádřit ve tvaru

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$$

Kuchařka vyvářela vodu za konstantního tlaku, tlak vytkneme před integrál

$$W = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p \cdot (V_2 - V_1)$$

Dosadíme hodnoty ze zadání (převedeme na základní jednotky)

$$W = 1{,}01 \cdot 10^5 \cdot (0{,}8655 - 0{,}5 \cdot 10^{-3}) \text{ J} = 87365 \text{ J} \approx 87{,}365 \text{ J}$$

K určení změny vnitřní energie použijeme první termodynamický zákon.

$$\Delta U = Q - W$$

$$\Delta U = (1130 - 87,\ 365) \text{ kJ} = 1042{,}635 \text{ kJ} \approx 1 \text{ MJ}$$

Vnitřní energie má kladnou hodnotu – během varu vnitřní energie systému roste. Tato energie je potřebná k oddělení molekul vody.

Systém vykonal práci 87,4 kJ a vnitřní energie systému se změnila o 1 MJ.

Úloha T2:

Jeden mol ideálního plynu o teplotě T_1 = 40 °C a objemu V_1 = 15 l byl převeden do stavu o objemu V_2 = 45 l s teplotou T_2 = 130 °C. Plyn byl izotermicky rozepnut a pak izochoricky doohřát. Určete vykonanou práci.
Poznámka: R = 8,3 Jmol^{-1}K^{-1}, 1 K = 1 °C + 273,15

Řešení úlohy T2:

První část procesu:
Při izotermickém ději se nemění teplota plynu. Jeho práce je dána vztahem

$$W_1 = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = n \cdot R \cdot T_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Druhá část procesu:
Při izochorickém ději se plyn rozpíná za konstantního objemu (práce se nekoná)

$$W_2 = 0$$

Celkovou práci vypočítáme ze vztahu

$$W = W_1 + W_2 = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Dosadíme převedené hodnoty ze zadání. Jelikož máme jeden mol ideálního plynu, proto n = 1.

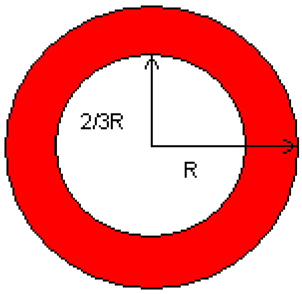
$$W = 8{,}3 \cdot 313{,}15 \cdot \ln \frac{0{,}045}{0{,}015} = 2846{,}33 \text{ J} \approx 2846 \text{ J}$$

Celková vykonaná práce je 2846 J.

2.3.3 Elektřina a magnetismus – úlohy

Úloha E1:

Vodičem tvaru válce o poloměru R = 2,5 mm protéká proud o hustotě proudu $\boldsymbol{j}$. Jak velký proud I protéká vnější částí vodiče (prstencem), která je vymezena poloměry $\frac{2}{3}$R a R (obrázek 2.2). Jestliže konstantní hustota proudu je $j = 2{,}3 \cdot 10^5$ A·m^{-2}. Hustota proudu se mění podle vztahu $j = a \cdot r^2$, kde $a = 3{,}0 \cdot 10^{11}$ A·m^{-4}



Obrázek 2.2: Průřez vodiče

Řešení úlohy E1:

Použijeme vztah

$$I = j \cdot S$$

Dopočítáme plochu průřezu

$$S = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \mathrm{R}\right)^2 = \frac{5}{9} \cdot \pi \cdot R^2$$

Potom

$$I = j \cdot \frac{5}{9} \cdot \pi \cdot R^2$$

Dosadíme hodnoty ze zadání

$$I = [2{,}3 \cdot 10^5 \cdot \frac{5}{9} \cdot \pi \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-3})]\ \mathrm{A} = 2{,}5\ \mathrm{A}$$

Prstencem vodiče prochází proud 2,5 A.

<u>Úloha E2:</u>

Vodičem tvaru válce o poloměru R = 2,5 mm protéká proud o hustotě proudu $\boldsymbol{j}$. Jak velký proud I protéká vnější částí vodiče (prstencem), která je vymezena poloměry $\frac{2}{3}$R a R (obrázek 2.2). Jestliže hustota proudu se mění podle vztahu $j = a \cdot r^2$, kde $a = 3{,}0 \cdot 10^{11}$ A·m^{-4}.

<u>Řešení úlohy E2:</u>

Elektrický proud vypočítáme ze vztahu

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

Vektor hustoty proudu $\boldsymbol{j}$ a vektor elementu plochy $\boldsymbol{dS}$ mají stejnou orientaci, platí tedy

$$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{dS} = j \cdot dS$$

Vyjádříme dS tak, abychom mohli integrovat v mezích od $\frac{2}{3}$R do R.

$$dS = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

V předešlém vztahu je $2\pi r$ obvod kruhového prstence o šířce dr.
Integrační proměnnou je tedy poloměr r.

$$I = \int j \cdot dS = \int_{\frac{2R}{3}}^{R} a \cdot r^2 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = 2 \cdot \pi \cdot a \int_{\frac{2R}{3}}^{R} r^3 \cdot dr = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_{\frac{2R}{3}}^{R} =$$

$$= \frac{\pi \cdot a}{2}\left(R^4 - \frac{16}{81} \cdot R^4\right) = \frac{65}{162} \pi \cdot a \cdot R^4 =$$

$$= \frac{65}{162} \cdot \pi \cdot \left(3{,}0 \cdot 10^{11}\right) \cdot \left(2 \cdot 10^{-3}\right)^4 = 6{,}05 \text{ A} = 6{,}1 \text{ A}$$

Prstencem vodiče prochází proud 6,1 A.

3 Praktická část

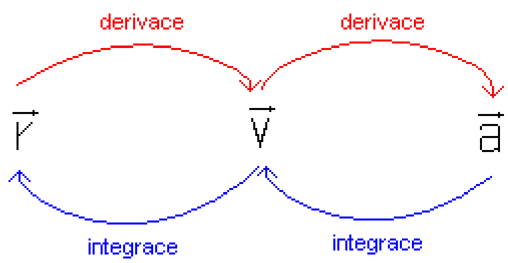
3.1 Základní údaje - pedagogický experiment

Praktické ověření čtyř úloh s fyzikální tématikou se konalo dne 24.2.2009 v hodině matematického semináře ve čtvrtém ročníku gymnázia v Gymnáziu a Střední odborné škole pedagogické v Nové Pace. Experimentu se účastnilo dvacet studentů, kteří seděli v lavicích po dvou. Z uvedeného počtu bude v letošním roce maturovat z matematiky devatenáct studentů a z fyziky šest studentů.

Pedagogický experiment si kladl za cíl prověřit schopnost středoškolských studentů aplikovat aparát matematické analýzy do úloh s fyzikální tématikou.

Po úvodu a plánu hodiny následoval výklad pojmu okamžitá rychlost. Pojem byl přiblížen pomocí limitního přechodu z průměrné rychlosti. Dále jsme definovali velikost rychlosti, okamžité zrychlení a dráhu pomocí derivace a integrálu. Výklad korespondoval se zavedením zmíněných pojmů v textu na straně 24 – 28. Úvod, plán hodiny a výklad trval přibližně deset minut.

Studenti měli na tabuli k dispozici schéma a následující vztahy:



Obrázek 3.1: Schéma výpočtu polohového vektoru, okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení

$\boldsymbol{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ vektor rychlosti

$v = \dfrac{ds}{dt}$ velikost rychlosti

$\boldsymbol{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$ vektor zrychlení

$\boldsymbol{v} = \int \mathbf{a} \cdot dt$ vektor rychlosti

$\mathrm{s} = \int v \cdot dt$ dráha

Dále studenti obdrželi pracovní listy se zadáním úloh, určené k zapisování vlastních výpočtů a výsledků. Řešení první úlohy probíhalo s celou skupinou vzorově na tabuli cca osm minut. Další úlohy řešili studenti samostatně cca dvacet pět minut. Během hodiny jsme procházeli i s vyučující mezi studenty a zodpovídali jejich dotazy.

Poslední dvě minuty byly věnovány shromáždění pracovních listů od všech studentů a shrnutí hodiny.

3.2 Pracovní listy

Naším vlastním přínosem je vytvoření všech úloh v pracovních listech. Uvádíme znění pracovních listů tak, jak bylo předloženo studentům. Byly určeny k zapisování vlastních výpočtů a výsledků.

MATEMATICKÁ ANALÝZA VE STŘEDOŠKOLSKÉ FYZICE

Vážení studenti,
jmenuji se Lenka Raulímová a ráda bych Vás požádala o řešení následujících úloh. Získané údaje mi pomohou ve vypracování diplomové práce, která se zabývá aplikací matematické analýzy ve středoškolské fyzice.
Předem děkuji za Váš čas a ochotu.

Řešení úlohy společně na tabuli:

Úloha 1:

Závislost dráhy na čase je dána vztahem $s = 4t^3 - 2t^2 + 8t$. Vypočítejte velikost okamžité rychlosti a zrychlení v čase $t = 2$ s.

Řešení úlohy 1:

Řešení úlohy samostatně:

Úloha 2:

Při ohňostroji byla ze země vystřelena raketa počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}$, pro kterou připadají v úvahu následující možnosti:

A) $\boldsymbol{v} = (8; 3t^2 + 1)$

B) $\boldsymbol{v} = (4t^2; t + 6)$

C) $\boldsymbol{v} = (0{,}5\, t^2 + 3t; 5t^2 - 1)$

D) $\boldsymbol{v} = (7t; 5)$

Pro který z uvedených vztahů je vektor zrychlení $\boldsymbol{a}$ konstantní?

Řešení úlohy 2:

Úloha 3:

Dvě částice prachu se pohybují stejným směrem. Jejich pohyb je popsán rovnicemi $r_1(t) = 5t - 8t^2 + 3t^3$ a $r_2(t) = 4t + 6t^2 - t^3$. Najděte čas t kdy se zrychlení obou prachových částic rovná. Jaké budou jejich okamžité rychlosti v tomto čase?

Řešení úlohy 3:

Úloha 4:

Na sáňky nasedly děti. Celková hmotnost sáněk s dětmi je 75 kg. Kamarád se je snaží roztlačit silou 30 N. Určete rychlost a dráhu, kterých sáňky dosáhly za 10 s.

poznámka: k výpočtu využijte druhý Newtonův zákon $F = m \cdot a$

Řešení úlohy 4:

3.3 Výsledky pedagogického experimentu

Naším přínosem je schéma výpočtu polohového vektoru, okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení (viz obrázek 3.1). Ukázalo se, že studenti se převážně řídili podle tohoto schématu. Byl pro ně pochopitelnější než zápis rovnic.

Následující tabulka shrnuje výsledky úloh, které řešili studenti samostatně. Sloupce tabulky označené „Počet studentů" udává počty studentů příslušné kategorie. Sloupce tabulky označené „%" značí počty studentů příslušné kategorie vyjádřené v procentech. První sloupec tabulky udává kritéria, podle nichž jsme výsledky klasifikovali.

Kategorií „Správné značení" rozumíme to, že studenti správně označili fyzikální veličiny, fyzikální jednotky, zápis vektorů a matematických výpočtů.

Skupina „Správný výpočet" udává studenty, kteří správným postupem došli k odpovídajícímu výsledku bez ohledu na to, zda užili správné značení.

Kritérium „Správné řešení" označuje počet studentů, kteří užili správné značení a dospěli ke správnému výpočtu, tj. kompletní správné řešení.

Kategorie „Numerická chyba" udává počet studentů, kteří užili správný postup, ale dopustili se matematické chyby ve výpočtu.

Řádek označený „Správné uchopení po matematické stránce" zahrnuje studenty, kteří užívali správných postupů při výpočtu derivací, integrálů, atd.

Skupina „Správné uchopení po fyzikální stránce" vypovídá o počtu studentů, kteří pochopili reálný fyzikální kontext problému.

Kritérium „Nepochopení" zahrnuje ty studenty, kteří měli závažné problémy s pochopením úlohy jak po stránce matematické, tak fyzikální.

Přehled výsledků experimentu						
	Úloha 2		**Úloha 3**		**Úloha 4**	
	Počet studentů	%	Počet studentů	%	Počet studentů	%
Správné značení	11	55	19	95	20	100
Správný výpočet	19	95	16	80	11	55
Správné řešení	11	55	16	80	11	55
Numerická chyba	1	5	1	5	0	0
Správné uchopení po matematické stránce	20	100	20	100	17	85
Správné uchopení po fyzikální stránce	16	80	18	90	11	55
Nepochopení	0	0	0	0	3	15

Z tabulky je patrné, že nejobtížnější úlohou z pohledu značení fyzikálních veličin a zápisu výpočtů byla úloha č. 2 (viz příloha č.1, pracovní list - Adéla). S ostatními úlohami z tohoto pohledu studenti neměli problém.

Nejvíce správných výpočtů tabulka zaznamenává u úlohy č. 2 (viz příloha č. 1, pracovní list - Filip). Přisuzuji to principielně podobnému způsobu výpočtu jako u vzorově řešené úlohy na tabuli. Nejméně správných výsledků je u úlohy č. 4 (viz příloha č.1, pracovní list - Adéla). Domnívám se, že je to z toho důvodu, že se v této úloze používá integrace. V předešlých dvou úlohách se objevily pouze derivace.

Uchopení úloh po stránce matematiky vesměs nikomu nedělalo problémy, výjimkou je opět poslední úloha, kde se objevují integrály (viz příloha č.1, pracovní list - Adéla).

Nejméně náročnou úlohou po stránce uchopení fyziky se jeví úloha č. 3 (viz příloha č. 1, pracovní listy – Adéla, Filip)

Studenti již měli dostatečně osvojený aparát matematické analýzy k počítání úloh v pracovních listech. Domníváme se, že pedagogický experiment prokázal, že studenti dokáží využít matematické analýzy u úloh s reálným kontextem – fyzikální tématikou.

Poznámka:

V Gymnáziu a Střední odborné škole pedagogické v Nové Pace se od příštího roku bude měnit počet let, v nichž bude fyzika povinný předmět pro všechny studenty: ze čtyř let v současnosti se přechází na tři roky. Studenti jevící zájem o fyziku si v posledním ročníku budou moci zvolit fyzikální seminář. A právě experiment popsaný v této diplomové práci vedl vyučující profesorku k rozhodnutí zvážit zařazení podobných úloh s fyzikální tématikou do hodin fyzikálního semináře.

Závěr

Fyzika se bez aparátu matematiky neobejde a naopak matematika by se bez fyziky nevyvíjela takovým tempem. V textu je proto zdůrazněn vývoj matematické analýzy od dob Leibnize a Newtona do konce 19. století.

Díky nedostatečné znalosti matematiky u středoškolských studentů jsou fyzikální vztahy užívané v hodinách fyziky zpravidla hodně zjednodušovány. V textu jsou tyto vztahy přesněji definovány pomocí aparátu matematické analýzy. Zaměřili jsme se převážně na mechaniku, neboť je z oborů fyziky nejnázornější a nejbližší lidskému vnímání. Bývá také vstupní disciplínou téměř všech fyzikálních kurzů.

Text zabývající se fyzikálními pojmy a vztahy je doplněn úlohami s fyzikální tématikou. V zadání úloh je kladen důraz na lehkou představitelnost problémů, které se týkají reality běžného života.

Součástí textu je i průzkum provedený na vybrané střední škole. Studenti účastnící se pedagogického experimentu se s úlohami podobného typu setkali poprvé. Z výsledků je zřejmé, že při mechanickém počítání derivací a integrálů neměl nikdo ze studentů až na drobné chyby, nikdo žádné potíže.

Jsme názoru, že pedagogický experiment ve vybrané střední škole prokázal, že je možné zařazovat podobné typy příkladů do běžných hodin matematického nebo fyzikálního semináře. Za předpokladu, že studenti již mají osvojený dostatečný matematický aparát k počítání těchto úloh, by podle našeho názoru měli být schopni více využívat matematické analýzy u úloh s fyzikální tématikou. Výsledky našeho experimentu předčily naše osobní očekávání; neočekávali jsme, že studenti budou schopni v takové míře matematickou analýzu v našich úlohách aplikovat.

Popsaná skutečnost nás utvrzuje v názoru, že lze přirozeným způsobem využít při výuce matematiky a fyziky interdisciplinarity mezi oběma disciplínami.

Použitá literatura

[1] BARTUŠKA, K.; SVOBODA, E., *Fyzika pro gymnázia, Molekulová fyzika a termika*, 3. vydání, Praha, Prométheus, 1993, 254 s., ISBN 80-7196-052-7

[2] BEDNAŘÍK, M.; ŠIROKÁ, M.; BUJOK, P., *Fyzika pro gymnázia, Mechanika*, 2. vydání, Praha, Prométheus, 1993, 343 s., ISBN 80-7196-068-3

[3] ČERMÁK, P., *Odmaturuj z matematiky 2*, 1. vydání, Brno, Didaktik, 2004, 48 s., ISBN 80-86285-84-7

[4] FEYNMAN, R.; LEIGHTON, R.; SANDS, M., *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady.* 1.vydání, Havlíčkův Brod, FRAGMENT, 2000, 732 s., ISBN 80-7200-405-0

[5] FOLTA, J., *Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století*, 1. vydání, Praha, Nakladatelství Československé akademie věd, 1961, 431 s.

[6] GRUBER, J., *Změna v matematice – matematika změny (aneb Malé dějiny nekonečna) Dnes to bude spíše výlet do dějin vědy, ale zato takové, bez níž by člověk ani technika nebyli tím, čím jsou.* [online].
[Cit. 13.10.2008] Dostupné z:
http://web.pilsedu.cz/~spstr/osobnistranky/josef_gruber/clanky/calcul.pdf

[7] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J., *Fyzika, Vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 1: Mechanika*, 1. české vydání, Praha, VUTIUM-Vysoké učení technické v Brně a PROMETHEUS, 2003, 328 s., ISBN 80-214-1868-0 (VUTIUM), ISBN 81-7196-213-9 (PROMETHEUS)

[8] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J., *Fyzika, Vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 2: Mechanika - Termodynamika*, 1. české vydání, Praha, VUTIUM- Vysoké učení technické v Brně a PROMETHEUS, 2003, 576 s., ISBN 80-214-1868-0 (VUTIUM), ISBN 81-7196-213-9 (PROMETHEUS)

[9] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J., *Fyzika, Vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 3: Elektřina a magnetismus*, 1. české vydání, Praha, VUTIUM- Vysoké učení technické v Brně a PROMETHEUS, 2003, 888 s., ISBN 80-214-1868-0 (VUTIUM), ISBN 81-7196-213-9 (PROMETHEUS)

[10] HEJNÝ, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2*, 2. vydání, Bratislava, SPN, 1990, 554 s., ISBN 80-08-01344-3

[11] HRUBÝ, D., KUBÁT, J., *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet,* 2. vydání, Praha, Prométheus, 2007, 210 s., ISBN 978-80-7196-210-6

[12] KOPÁČKOVÁ, A., *Beginning of calculus in school mathematics* – In Sborník konference ICPM 06, Liberec, Technická univerzita Liberec, 2006, ISBN 80-7372-153-8

[13] KOPÁČKOVÁ, A., *Obyčejná derivace?* – In Sborník příspěvků z konference ICPM 05, Liberec, Technická univerzita Liberec, 2006, ISBN 80-7372-055-8

[14] KOPAL, A.; ERHART, J.; ČMELÍK, M.; MACHONSKÝ, L., *Fyzika II – Elektřina, magnetizmus, Maxwellovy rovnice*, 1. vydání, Liberec, Technická univerzita v Liberci, 2008, 232 s., ISBN 978 – 80 – 7372 – 311 – 8

[15] KOPAL, A.; MACHONSKÝ, L.; ŠIMEK, L.; ČMELÍK, M.; BURIANOVÁ, L.; KAZDA, V., *Fyzika 1. Mechanika. Kmity, vlny. Nauka o teple,* 1. vydání, Liberec, Technická univerzita Liberec, 2005, 152 s., ISBN 80-7083-903-1

[16] KOPAL, A.; MACHONSKÝ, L.; ŠIMEK, L.; ČMELÍK, M.; BURIANOVÁ, L.; KAZDA, V., *Příklady z fyziky 1. Mechanika. Kmity, vlny. Nauka o teple.* 5. vydání, Liberec, Technická univerzita Liberec, 2004, 121 s., ISBN 80-7083-804-3

[17] KRAUS, I., *Fyzika v kulturních dějinách Evropy od Leonora ke Goethovi*, první vydání, Praha, Česká technika – nakladatelství ČVUT, 2007, 276 s., ISBN 978-80-01-03716-4

[18] *Osmá a devátá přednáška, Aktuálně nekonečně malá, vznik infinitesimálního počtu a 2. metodologická krize matematiky* [online].
[Cit. 13.10.2008] Dostupné z:
http://64.233.183.104/search?q=cache:auzas6Y7p14J:www.kmt.zcu.cz/subjects/fom/kap89.doc+matematick%C3%A1+anal%C3%BDza+leibniz&hl=cs&ct=clnk&cd=16&gl=cz

[19] POLÁK, J., *Přehled středoškolské matematiky*, 4. vydání, Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1983, 628 s., ISBN 14-351-83

[20] Přednášky z předmětu Mechanika, Lidmila Burianová

[21] SEZNAM ENCYKLOPEDIE, *Hustota elektrického náboje.* [online].
[Cit. 8.12.2008] Dostupné z:
http://encyklopedie.seznam.cz/heslo/513488-hustota-elektrickeho-naboje

[22] STRUIK, D., *Dějiny matematiky*, 1. vydání, Praha, Orbis, 1963, 251 s., ISBN 11-123-63

[23] SVOBODA, E., *Přehled středoškolské fyziky*, 2. vydání, Praha, Prométheus, 1996, 497 s., ISBN 80-7196-006-3

[24] SVRŠEK, J., BARTOŠ, R., *Z historie matematiky a fyziky (2)* [online]. [Cit. 13.10.2008] Dostupné z: http://natura.baf.cz/natura/2001/7/20010705.html

Přílohy

Příloha č.1: Pedagogický experiment (2 vyplněné pracovní listy)